M. MEIBOMII,
CONSILIARII REGII,

DE
PROPORTIONIBUS
DIALOGUS.

AD
SERENISSIMUM PRINCIPEM,
FRIDERICUM III,
DANIÆ, NORVEGIÆ, VANDALORUM, GOTTHORUMQUE
REGEM, &c.

ΞΥΝ ΤΩ ΘΕΩ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΟΥΝΤΙ
ΠΑΣ ΣΟΦΟΣ ΑΕΙ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ.

HAFNIÆ,
Typis MELCHIORIS MARTZANI,
cIɔ Iɔc LV.

SERENISSIME REX,

SUmmam naturæ varietatem ac solertiam consideranti mihi illud semper admirabile visum est, quod, quæcunque ipsius leges ac rationes innotuerunt, non uno quodam feliciore seculo, sed variis, inventæ sint; admirabilius autem, quod paucæ adeo gentes inveniendis illis, interdum ratiocinando, sæpius casu, ingeniorum suorum felicitatem orbi commendaverint. Quod utrumque absque divina quadam providentia evenisse nequit. Primum enim DEUS voluisse videtur, ut mundi conditi certum hominibus argumentum præberet rerum paulatim inventarum series: alterum, ut manifestis gratiæ suæ signis omnes gentes, tam quæ in-

ventis aut olim floruére, aut nunc feliciter fruuntur, quàm quæ nullam humanæ vitæ insignem utilitatem attulére, ad omnium rerum contemplationem, adeoque ad cultum ipsius ac venerationem, excitarentur. Quamvis enim Deus omnes homines clementiæ suæ radiis, rectis alios, alios obliquis, illustrarit; eosdem tamen difficultatum quibusdam quasi nebulis, majoribus aut minoribus, urgeri voluit, ut & sui desiderium in illorum animis accenderet, & in propulsandis naturæ suæ adversis acueret industriam. Itaque cum naturam Deus, primus motor, ita fabricasset, ut motu omnia gauderent, illiusque æquabilitate diviniora quæque censerentur; hominem binis diversis rebus, anima & corpore, constantem, binis quoque exercitiis occupari voluit, ratiocinando & agendo. Hoc quippe divinam mentem inspexisse putandum, ut, cum majestatem suam ac

potentiam in conſtituenda totius mundi harmonia demonſtraſſet, præſtantius aliqvod animal, hominem, fingeret, qui agendi libertatem nactus, ratiocinando ineffabilem artificis ſapientiam ſtupere cogeretur. Uti enim inſignis ſtatuarius, qui corporis proportiones omnes obſervando, vivam ſtatuam formaſſe videri poſsit, majori ſibi gloriæ ducit, ſi ab uno ſapiente, quàm ſi ab innumerabili & indocto vulgo, artificium ipſius celebretur; ſic immenſus ille naturæ artifex, qui ſtupendam univerſi harmoniam æterna lege fabricavit, ſummum gloriæ ſuæ apicem in humanis conſecutus videtur, ſi à doctis, & cum ratione ipſius opera ſtupeſcentibus adoretur. Hinc autem futurum erat, ut poſtquam omnia ſapienter à Deo conſtituta homo crederet, felicitatem ſuam, quæ in animæ ac corporis beata ſocietate conſiſtit, ſapientia in primis ac prudentia, quæ ex

cognita universi harmonia ac proportione oriuntur, comparandam censeret. In hoc igitur utroque summo nobis studio elaborandum, ut cogitatione multa ac rerum usu animam exercendo, naturæ rationes ac proportiones adsequamur; vitam autem nostram, quàm fieri potest maxime, ea ratione ac harmonia, quam natura monstravit, prudenter constituamus. Nihil autem divinius in natura observatur, nihil pulchrius, quàm ratio rerum omnium ac proportio; cujus principium, & medium, ac finis Deus ipse est, qui in nihili ratione consideratur. quippe virtutis augmentum æque ignorans ac defectum in summa bonorum omnium æqualitate, immutabilis, æquabili motu cuncta impellit. Cætera verò omnia, divina atque humana, quæ in utramque partem varietatem induerunt, eò præstantiora censentur, quò à simplicissima illa ratione propius ab-

ſunt. Quæ quidem quàm concinnè de tota rerum natura pronuncientur, nemo, niſi qui perceptis proportionum elementis, DEUM ſemper menſurantem conſideraverit, judicare poteſt. In tradendis autem illis elementis; quamquam divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, & quotquot unquam Pythagorici floruére, hîc deſudarunt; primus omnem eruditam vetuſtatem, quantum ex ſcriptis illius ſcitur, ingenti molimine, quod præfiſcini dixerim, ſuperavi. Atque hoc erudito orbi examinandum propoſiturus, tibi, SERENISSIME REX, DOMINE CLEMENTISSIME, hunc librum humillime offerre debui: qui non tantùm benignitate tua, ſed etiam curioſa inquiſitione, & ſapiente diffidentia; ut qui Mathematicarum diſciplinarum, atque in primis Geometriæ certitudinem perſpectam habes; ad edendum illum me animâſti. Sed & tuo exemplo omnes ad

cognoſcendam hanc de proportionibus doctrinam incitabis; qui artes ac ſcientias fovendo, virtutem omnem æſtimando, non tantùm ſubditos tuos, ſed univerſum orbem, ad præclara quæque, & eruenda naturæ myſteria, hortaris: qui pius, juſtus, fortis, vitâ tuâ conſonantiſsimâ ad eundem concentum ſubditorum animos impellis. Itaque, cum omnes Rege optimo glorientur, Deumque ſupplices orent, ut eodem vitæ tenore, felicitate autem maxima, conſtanter Regna tua animes; futurum ſpero, ut non tantùm Arctous orbis, ſed quotquot ubique terrarum homines cum ratione vivunt, mecum judicent, virtutis tuæ rationem eſſe ineffabilem.

SACRÆ MAJESTATI
TUÆ

devotiſſimus ac
fideliſſimus

M. MEIBOMIUS.

Præfatio ad Lectorem.

QUod orbis literatus gaudeat, posteritas grata memoria recordetur, primi novas Geometricarum rationum leges in natura deteximus, & falsas propositiones in eo libro invenimus, quem ultimæ antiquitatis divini viri, Pythagoras, Eudoxus, Euclides, ex Ægyptiorum & Patriarcharum inventis condiderunt; omnium autem seculorum præcipui philosophi ac sapientes legendo examinarunt. Voluit mundi conditor, ut Christophorus Columbus, cum sæpius ante de terra rotunditate dubitatum esset, ex flantium stato tempore ventorum experimentis ratiocinando, novas terras quærendas susciperet: sed & idem omnis naturæ, certa ratione compaginatæ architectus, homini admirandis harmonicarum rationum legibus ad universarum rerum rationes contemplandas abducto, non novas terras, omni divitiarum genere abundantes, non barbaros homines; sed novas rationum Geometricarum leges, quibus in omnium rerum harmonia concinnanda Deus usus est, & omnis sapiens, Dei adsecla, in humanarum rerum harmonia componenda, utetur, primo monstravit, patefecit. Quod si vel tanto minus inventum nostrum censeretur, quanto majus est falsum invenisse, quod omnes sapientes verum credebant; quàm novi aliquid in eo reperisse, de quo multi ante dubitarant; tamen & Deo, Optimo, Maximo, humillimas gratias agere deberem, qui ad aliquam in natura fundatam veritatem, ratiocinando inveniendam, ingenium suffecit; & disciplinis Mathematicis gratulari, quod certiora in posterum tradere possint. Ad hæc autem examinanda antequam eruditus lector accedat, de quibusdam est monendus, quæ tam inventionem ipsam, quàm alia quædam concernunt. Inventionis igitur occasionem præbuit Euclidis liber de Canonis Sectione, quem anno cIↃ IↃ C XLIX, mense Novembri, typographo excudendum dederam. In primo illius theoremate, quod nostra Musicorum editio habet paginâ 24; Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον, δὶς συντεθὲν, ποιῇ τι διάστημα, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται. Si intervallum multiplum, bis compositum, fecerit aliquod intervallum, etiam illud erit multiplum: *verbum Græcum* συντεθὲν, compositum *Latinis, inde mihi scrupulum injiciebat, quod, cum in adolescentia Geometriæ operam navassem, recordarer, Clavium adpendice ad Euclidis Elementum nonum,*

multis probare, compositionem hanc esse multiplicationem. ideoque hæc verba, δὶς συντεθὲν, bis multiplicatum *vertenda censebam. Hoc cum sollicite mecum expenderem, qui religiosi interpretis munere in cultissima veterum scientia defungi semper optâram, altius hæc inquirenda suscepi; etiam ea de causa, quod ad Clavii subtilitates illas, quas ad V libri Xmi definitionem, ad VIti quintam, & illa adpendice, exposuit, nulla ingenii vi in adolescentia penetrare potuissem. Illo autem tempore tot locorum in desperatis auctoribus restitutione, quasi perpetuis victoriis, animatus, nihil tam arduum, nihil ita intricatum in scientiis, quæ quidem ratione aliqua constitutæ essent, inveniri arbitrabar, ut, si ingenii nervos contendere vellem, explicatum illud dare diffiderem. Cum itaque circa vesperam profundioribus cogitationibus me totum dedissem, ut à naturæ principiis rationum contemplationem arcesserem, duarum horarum spatio illius doctrinæ fundamenta excogitavi: in quibus deinde examinandis integro quinquennio fui occupatus. Euclidi tamen, quem primum editum, ultimum notis illustravi, eò loco dissertationem de hac doctrina attexere decreveram, quo erat inventa: quamvis majorem occasionem præberet Nicomachus in Harmonicis pag. 24. v. 30. qui ex octava propositione Vti Elementorum Euclidis, duplam rationem ratione subdupla, quam dimidiam vocat, longe majorem statuit. Ita enim loquitur: κακῶς γὰρ οἴονται, οἱ νομίζοντες διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι. ἰδοὺ γὰρ τὰ δύο πρὸς τὸ ἓν, διαφορὰν μὲν ἔχει τὴν αὐτὴν, ἣν ἓν πρὸς δύο· σχέσιν δὲ οὐ τὴν αὐτήν. τὰ μὲν γὰρ δύο, διπλάσια· τὸ δὲ ἓν, ἥμισυ.* Male enim opinantur quicunque putant idem esse differentiam & relationem. Ecce enim duo ad unum, differentiam quidem habent eandem, quam unum ad duo; at non eandem rationem. Namque duo unius dupla sunt; unum verò, dimidium est duorum. *Ultima verba liquet intelligenda esse ac si ita legerentur: τὰ μὲν γὰρ δύο πρὸς τὸ ἓν διπλάσιον λόγον ἔχει τὸ δὲ ἓν πρὸς τὰ δύο, ἥμισυν.* Binarius enim ad unitatem duplam rationem habet; unitas autem ad binarium, dimidiam. *quomodo Theonem Smyrnæum locutum notavi pag. 167. Illud autem consilium propterea mutavi, quod à paucis hæc ibi lectum iri prævidere possem. In notis tamen ad Gaudentium pag. 37. eam loquendi formulam ex nova hac doctrina usurpavi, quam ex veterum sententia acutus Geometra falsitatis damnasset. Cum postea majus otium in Suedia nactus essem, anni ϲIϽ IϽC LIII hieme, dialogi forma*

conscripsi quæcunque huc pertinerent. Quam scribendi rationem si quis in Mathematicis non ferendam putet, illum his perlectis aliter judicaturum confido. Infinitis enim altercationibus ansam præcidi, dum præcipuis argumentis, quæ contra adferri poterant, respondi: multa etiam, quæ in lectoris animo subnata fuissent, diligenti explicatione extirpavi. Præterea principia quædam Geometriæ convellere suscepi; quod absque longiore disputatione fieri non poterat. Breviter autem & presse omnia conceperam, Heracliti monitum multis locis secutus, ut sciolum vulgus etiam intelligendi difficultate ab his arcerem. Sed hanc sententiam deinde mutavi, multis interpolatis, & late explicatis, quæ ad intelligendam doctrinam ipsam pertinere viderentur. Ut tamen sciolos torquerem, multa, inprimis quæ de mistis concinne admodum & jucunde excogitaram, omisi. Cætera, quæ ex auctoribus, antiquis & junioribus, etiam sacris, illustrandi gratia, adduci poterant, quod nihil ad scopum facerent, præterii. Quod si vera hæc lector candidus & eruditus judicaverit, illa unà cum quinto Elementorum libro ex nostra editione, Græce & Latine, proferemus: sin falsa; quod quidem judicium contra quinquennale examen magno molimine intercedet; nimia jam opera & me, & lectorem, fatigavi. Hoc autem maxime optarem, tam mea, quam lectoris gratia, qui ad hæc legenda & examinanda accedet, ut, antequam censoria virgula quidquam damnare suscipiat, exempla hujus novæ doctrinæ, quæ in Harmonicis natura monstravit, probe perpendat. Illorum enim ignoratione recentiorum errores succreverunt. Instrumentum autem, quod monochordum vocatur; quamvis pluribus chordis contendi possit; facili negotio ab artifice paratur, nec magno admodum in præcipuarum rationum partes dividitur: nisi canonem, seu regulam, quod veteribus in usu erat, ita dividere libeat; qui, ejusdem tensionis chordas omnes longitudine æquans, singulis supponi possit. De dividendo autem illo canone brevis ille & nervosus Euclidis libellus, quem Canonis Sectionem inscripsit, inter cæteros Musicos nostros accuratè editus extat. In notis quoque ad Aristidem Quintilianum pag. 312. Geometricè & Arithmeticè divisum canonem tanta diligentia exhibui, ut nihil amplius ad intelligenda ea requiri possit. Hoc igitur instrumento; etiam Pythagoræ sententia, qui auditores suos monochordo uti jussit; acutus lector adjutus; expensis quoque locis illis, quos ex antiquis auctoribus produxi; verius & felicius de his judicabit. Cæterum illud adfirmare ausim, apud veteres nihil reperiri,

quod quidem editum sit, aut ex MSS. nostris haberi potuerit; quod non legerim, & severa cura examinarim. In Asclepio autem evolvendo; cujus commentarium ad II^dum librum Arithmeticæ Introductionis Nicomachi, ubi de rationum compositione agitur, perlegere averem; lacuna magna sum delusus, quam nullo signo meus codex notatam habet. Asclepii Tralliani liber II ita incipit : Ἐνταῦθα μέλλει δεῖξαι, ὅτι ἡ ἰσότης στοιχεῖόν ἐστι τοῦ πρός τι ποσοῦ· ἤτοι τῆς ἀνισότητος. *Duobus post hoc principium foliis, largius exaratis, hæc sunt verba :* δεῖ οὖν παραδοῦναι ἡμῖν μέθοδον καὶ τέχνην τινὰ, δι' ἧς ἂν εὑρίσκωμεν δ' ἡμιολίους, ἢ ε' ἐπιτρίτους ἁπλαίστως, καὶ μὴ ἰδιωτικῶς· ἤτοι ἀμεθόδως καὶ ἀτέχνως. ἐπιχειρῶμεν τοῦτο ποιεῖν μετρία ἀναλογίας ἐθεώρησαν οἱ νεώτεροι. τίνας δὲ ἐν μουσικῇ. καὶ τίνας ἐν ἀριθμητικῇ. μέλλει οὖν ἐνταῦθα διαλιπεῖν ἔτι λέγειν περὶ τοῦ πρός τι ποσοῦ. *Quæ per mutilum verbum* μετρία *nulla ratione cohærere ex antecedentibus & consequentibus planum est. Desunt autem quæ ad Nicomachum editum à pagina 40. v. 20. usque ad paginam 44. v. 1. erat dicturus. Si quis exemplar magis integrum nactus hæc suppleret, rem gratam faceret. Extat autem hic Asclepius cum in aliis bibliothecis, tum in celeberrima Medicéa, ubi pluteo LVIII, codice XXIX, in quarto, ut vocant, inter alia scripta reperitur. Jamblichus; cujus operum insignes codices eadem bibliotheca habet, III & XXIX, pluteo LXXXVI; num de rationum compositione ad hunc Nicomachi locum quædam commentatus sit, videri vellem. Egregiam operam disciplinis Mathematicis navaret, si quis Nicomachi Arithmeticam Introductionem, sua & Boëthii, & si extaret, Apuleji Madaurensis, versionibus adornatam, à Jamblicho autem & Asclepio explicatam, Græce & Latine ederet. Quanti hunc Pythagoricum antiqui fecerint, ex tot versionibus & commentariis, quæ in Arithmetica ipsius & Musica conscripta sunt, constare potest. Porro legi quoque Porphyrii commentarium in Harmonica Ptolemæi, ubi de rationibus non pauca habentur. Nicephorum, quem in eadem Harmonica scripsisse ferunt, videre non contigit. Inter alios quoque legere optarem Adrasti Peripatetici Harmonicorum libros tres, quos in Nova MSS. Bibliotheca vir clarissimus, Philippus Labbeus, extare dicit in bibliotheca Cardinalis à S^to Angelo, quæ nunc est Cardinalis Farnesii fratris. Autorem ex quibusdam locis notum auro redimere vellem. Recentiorum commentarios non admodum solicite conquisivi, quod Clavio lecto plerosque omnes me legisse scirem. Fusissime enim ad Euclidem*

de proportionibus commentando non tantùm Hieronymum Cardanum; qui in Arithmetica sua, & Opere de Proportionibus hæc tractavit; & Volumnium Rodulphum Spoletanum, ad sua confirmanda adduxit; sed etiam aliorum opiniones refutavit. Volumnii verò tractatus de proportione proportionum, nisi meliora habeat quàm quæ ex ipso Clavius protulit, Volusii annalibus insertus potius periisset, quàm ut Mathematicos in erroribus suis confirmaret. Nec postea quidquam novi de his prodiisse, ultimus scriptor, Gregorius à S^to Vincentio, qui hoc alias monuisset, confirmare possit. Hujus autem errores, quod plane insignes sint, totumque orbem irretitum teneant, clarius demonstrandos duxi, ut omnes viderent in circuli quadratura perficienda non plus novi quam falsi ab ipso esse repertum. Enimvero ab inventæ Matheseos tempore nullum fuisse puto, qui plus centum & triginta falsas propositiones ex uno erroneo principio deduxisset. Gratiam igitur à Mathematicis me initurum credidi, si quadraturam illam ab ipso fundamento everterem. Cæterum erroris illius de rationum compositione, & multiplicatione, primum auctorem statui Theonem Alexandrinum, quod ipsius verba illum stabilire viderentur. Euclidem quoque auctorem feci definitionis quintæ libri sexti, quamvis ex eo tempore, quo tot incommodis laborare mihi visa est, Euclide indignam judicarim. Sed hac opinione mea lectorem turbare nolui. Adstipulatur mihi Euclides Arabicus; ex quo etiam Campani versio prodiit; qui hanc definitionem non habet; quod Arabs interpres in hujusmodi vetustum ex genuina Euclidis editione exemplar inciderit, cum nondum ista adsuta esset. Nec Eutocii me movet auctoritas, qui Euclidi illam tribuit: longe enim ante ipsius tempora Elementis infercta esse potuit. Juniores itaque ex VI^ti libri propositione XXIII illam effinxerunt: quomodo, quod profecto notabile est, Scholiastes V^ti libri definitionem XV, quam sequente folio edendam curavi, à Junioribus additam dicit. Usitatum autem fuit antiquis, ut auctorem corruptum, & multa descriptione tandem vitiosum; quod in Mathematicis præcipue evenire potuit, quæ tum ob additas figuras, tum ob literarum notas erroribus sunt obnoxia; ejusdem professionis alius accurate recenseret, & tum ex vetustis exemplaribus, tum ex ingenio restitueret. Nec raro accidit, ut auctori vel ipse quædam adderet, vel etiam ex aliis obscuriora ejus loca illustraret. Unde auctoris gloria sæpe ad emendatorem transiit. quod in Euclidis Harmonicis factum esse, quæ Cleonidæ, aut Pappi nomen tandem prætulerunt,

alibi monstravi. Porro de Proportionibus hunc dialogum inscripsi, nempe Geometricis; quod cætera potius Medietates adpellentur. De Rationibus Geometricis inscripsissem, nisi à toto & præstantiore nomen imponendum fuisset. Auctorum autem loca Græce & Latine edenda censui, ut veterum dogmata nonnisi ex ipsis fontibus haurirentur. Quantum in vertendis illis & emaculandis præstiterim, illi demum cognoscent, qui aliorum versiones inspexerint. Nam & doctissimi quique viri in his interdum hallucinati sunt, vulgaribus erroribus abrepti. Quam enim turpe est, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis summus, ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, *interpretatus sit, Clavium, aliosque, etiam doctos viros, sequendo,* rectangulum sub AB, BC; *cum vertendum esset,* rectangulum ab AB, BC, *nempe* contentum, περιεχόμενον. *quod verbi brevitatis causa Mathematici omittunt, ut & plerumque vocabulum,* ὀρθογώνιον, rectangulum. *Sed ad hujusmodi notanda nunc non descendemus. Quod si illa, quæ ex antiquis perperam versa sunt, etiam à solertissimo Mathematico, Federico Commandino, Græcæ linguæ mediocriter perito, examinare vellem, rebus Mathematicis non parvam lucem me allaturum sperarem. Atque hæc præcipua sunt, quæ de hoc tractatu monenda duxi: sed alia non pauca habeo, quæ cum ingenuis & eruditis viris communicare vellem. quorum unum atque alterum hîc adponam. Et quidem primo Ignatii locum variis celeberrimorum virorum explicationibus infeliciter tentatum, obiter adducemus. Is est in epistolæ ad Romanos inscriptione, ubi hæc sunt verba:* ἥτις προκάθηται ἐν τόπῳ χωρίȣ ῥωμαίων. *Hanc lectionem tam Græci codices, quàm veteres duo Latini interpretes confirmant, ut revera adpareat esse vetustissimam. Neque enim* πρώην ϗ χθὲς *imperiti homines, corrumpendis auctorum veris scripturis nati sunt, sed jam ante mille & amplius annos docti viri conquerebantur,* ὅτι τῶν παλαιῶν βιβλίων ἐπὶ τὸ χεῖρον κινεῖται ἡ γραφή. *Subtilissima est eorum sententia, qui de regionibus suburbicariis hunc locum accipiunt; sed durior atque inconcinna. ut certe ineptior mihi videatur Vedelius, qui hoc commode explicari posse contendit, quàm Casaubonus, qui locutionem dixit barbaram. Simpliciter enim scripturus fuisset,* ἐν χωρίῳ ῥωμαίων προκάθηται. *& regionis locus fuisset demonstrandus. Nec ex Luca adductus locus quidquam probat. Vir eximius, Isaacus Vossius, pro* χωρίȣ *putat legendum* χορȣ̃. *maxime quod alter veterum interpretum eò inclinare videatur. verum dubio procul ille*

ſcripſerat chorii, *quod etiam Clariſſ. Uſſerio obſervatum. Inconcinna quoque inde colligeretur ſententia. Poſſum veram lectionem proferre quàm minimâ ſcripturæ immutatione, ſi pro* χωρίȣ *ſcribatur* κυρίȣ. *Quàm enim* κ *&* χ *figurâ ſimiles inter ſe ſint literæ, illis præcipue notum, qui non ſolùm vulgarem typographorum formam conſiderant, ſed etiam vetuſtæ ſcripturæ Græcos codices inſpexére. De literis* υ *&* ω *non opus eſt ut moneam. Romanum itaque epiſcopum* ἐν τόπῳ κυρίȣ ῥωμαίων προκαθῆσθαι *dicit*, Dei loco Romanis præſidere. *Hanc noſtram lectionem ſimili ejuſdem Ignatii locutione confirmare poſſumus. Ita enim loquitur in epiſtola ad Magneſios:* παραινῶ, ἐν ὁμονοίᾳ θεȣ̃ σπȣδάζετε πάντα πράσσειν, προκαθημένȣ τȣ̃ ἐπισκόπȣ εἰς τόπον θεȣ̃, καὶ τῶν πρεσβυτέρων εἰς τόπον συνεδρίȣ τῶν ἀποσόλων. moneo, in concordia Dei ſtudete omnia operari; præſidente epiſcopo in loco Dei, & presbyteris in loco conſeſſionis Apoſtolorum. *Epiſcopus hîc* εἰς τόπον θεȣ̃ προκάθηλαι, *ut ibi* ἐκκλησία, *hoc eſt, epiſcopus Romanus, ejus caput,* ἐν τόπῳ κυρίȣ. *Quid ſimilius dici potuit? Cæterum* ἐν τόπῳ, *&* εἰς τόπον *indifferenter uſurpari, vel leviter in Novi Fœderis phraſi exercitatus novit. quod ex Hebræorum* ב *originem habet. Sed & alium ejuſdem locum hîc reſtituemus. Epiſtola ad Trallianos vetuſtæ Ignatii epiſtolæ legunt,* οἱ καιροὶ παρεμπλέκȣσιν Ἰησȣ̃ν χριςόν. quæ & inquinatis implicat Jeſum Chriſtum. *Voſſius ex recentioribus epiſtolis, in quibus eſt,* καὶ τὸν ἰὸν προσπλέκονλες, *emendat,* οἱ καὶ ἰοῖς παρεμπλέκονλες. *Neſcio an inepte; certe verbo non adeo Græco. Lege vel ſyllabas tantùm colligendo,* οἱ καὶ ῥυπαροῖς ἐμπλέκȣσιν. *Alterum, quod hîc adducturus ſum, eſt de Veterum navibus, de quibus nuper diligentiſſime tractavit Joa. Schefferus. In omni autem de navibus illis diſquiſitione duo in primis difficilia ſunt; unum, quomodo intelligendi ſint illi triremium, majorumque navium ordines; alterum, quodnam genus navium fuerit, & hemiolia, & triremiolia. Utramque hanc difficultatem, quæ ſummos viros hactenus torſerat; Lazarum Bayfium, Joſ. Scaligerum, Cl. Salmaſium, Henricum Savilium, Thomam Rivium; Notis ad Vitruvium, qui Amſtelodami anno CIↃ IↃC XLIX editus eſt, nova, ſed brevi admodum explicatione, quod alio loco prolixe hac de re acturus eſſem, primus ſuſtuli. Illarum alteram ſententiam meam, quæ de ordinibus eſt, utcunque etiam tradidit Schefferus, à ſe, ut ſcribit, excogitatam: quamvis abſurdam aliorum ſententiam idem amplexus eſſet in diſſer-*

tatione quadam, quam antea hac de re ediderat; ut & ipse ingenue fatetur pag. 92. Salmasius, qui notas illas, antequam ederentur, legerat, quamvis iis multa ex suis placitis labefactari videret, majori tamen veritati, quæ sine ulla contumelia proponeretur, locum dedit. Nunc Schefferum de illis solum, in quibus à veritate in his duobus explicandis aberravit, paucis monebo. Primum igitur non vidit, quo differant versus & ordo. quamvis, quod mirandum, nec Scaliger, aut Salmasius idem observarint. Versus autem est, series remigum in uno latere æque alte sedentium; ut, in triremi, summorum, seu thranitarum versus plerumque erat remigum L; item zygitarum, seu mediorum, versus L remigum, & totidem infimorum, seu thalamitarum. Ordo autem est series remigum à summo ad imum tendens. Unde primo ordine thranitæ considunt, altero zygitæ, tertio thalamitæ. Versus igitur, Græcis στίχος, *secundum navis longitudinem sumitur; ordo,* τάξις, *secundum altitudinem. Multa, si hîc locus esset, huic sententiæ confirmandæ adferre possem. Sufficit illud, quod ternum ordinem* consurgere *Virgilius dicat. Errat igitur Schefferus pag. 91. v. 21. & aliis locis. Deinde in eo errat, quod pag. 94. in Aristophanis versu explicando ordines ita collocet, ut thranites videat dorsum zygitæ, & hic, dorsum thalamitæ; cum contra ego illos ita disponam, ut thranitæ dorsum videat zygites, & hujus dorsum thalamites, omnes puppim versus collocati. Ideoque optimo Aristophanis Scholiastæ, quem Scaliger, Salmasius, & cum his Schefferus, absque ratione improbant, thranites est,* ὁ πρὸς τὴν πρύμναν, puppim versus, *non,* in puppi, *sed puppi proximus. Similiter thalamites est,* ὁ πρὸς τὴν πρώραν, proram versus, *magis proram versus à puppi remotus, quam zygites, & hic magis quàm thranites. Porro unde hemiolia dicta sit, primus quoque ex Etymologico Magno docui; cujus locum, restituto vocabulo* μάχιμον, *ita legi:* ὧ τὸ μάχιμον ἡμιόλιον μέρος ψιλῶν ἐρετῶν ἐστι. cujus pars armata sesquialtera est nudorum remigum. *hoc est, si L viros haberet tota hemiolia, horum XX; ab unoquoque latere X; erant solum remiges, remis semper incumbentes in ordine inferiori; XXX, cum hostis adesset, armati. Male Salmasius in Observationibus ad Jus Atticum, pag. 716. & cum illo Schefferus pag. 74. legendum putavit.* ψιλὸν ἐρετῶν. *Præterea non intellexére vocabulum* ἡμιόλιος. *Atque hæc hactenus. Vale lector candide, & inventis, ad DEI gloriam, tuamque salutem, feliciter utere. Hafniæ, CIↃ IↃ C LV. XIV Calendas Martii.*

NOTÆ QUÆDAM, UT ET ERRATA CORRIGENDA.

PAginâ 11. v. 3. particula *tantùm* non excludit numerum, si magnitudines illæ sint rationales.

v. 17. τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ ποσοῦ.] Hoc falsum esse in ipso tractatu monstravi. quippe *magnitudinum* Euclides dixit, ut etiam irrationales quantitates comprehenderet, quæ numeris exprimi nequeunt. Nec ideo id vocabuli adhibere potuit, ut magnitudines solùm, non autē numeros quoque rationem inter se habere significaret. Quod si nostro sensu Euclidem eo vocabulo usum Scholiastes denotare voluisset, scribendum fuisset, τοῦ ἄλλου εἴδους τοῦ ποσοῦ. *ut ab altera quoti specie separaret.* Nescio certe quot species quoti hic Scholiastes somniarit. Fortasse soni, pondera, tempora, & aliæ res numeratæ, ipsi species quoti censentur. Duas solùm antiqui nominarunt. Aristides Quintilianus Musicæ libro III, pag. 120. διττοῦ δὲ ὄντος τοῦ ποσοῦ. *cum duplex sit quantitas*, seu potius, *quotitas*. Sic quoque Asclepius, & alii.

Pag. 13. v. 2. pro *numeris* scribe *rationibus*. & dele versum 9 & 10.

Pag. 14. v. 10. scribe, *eorundem*. v. 23. pro $\frac{17}{6}$ scribe, $\frac{17}{11}$.

Pag. 16. v. 13. Plane scribendū, τὴν ἔννοιαν ἀποπληρῶσαι. ex præcedentis vocabuli ultimâ syllabâ αν male repetitâ hic error natus est. nec Græcum verbum est ἀναποπληρῶσαι.

Pag. 17. v. 5. scribe, Ἥρωνας, Heronas. v. 7. delerem particulā καὶ. v. 34. omnino legendum, πηλικότης, οὖσα μονάς.

Pag. 19. v. 35. plane scribendum, ἀλλ᾽ ἢ τὸ.

Pag. 20. v. 24. legendum, τὰ δύο τέταρτον. quod etiam interpretando observavi.

Pag. 21. v. 2. addidi ὅροι. v. 24. addidi ἔχει.

Pag. 25. Cum hæc ederentur, ad manum non erat Theonis commentarius in Magnā compositionem Ptolemæi; ex quo hic locus desumtus est, & Euclidis Elementorum libro VI in Græco exemplari Basileensi præfixus. Quoniam igitur ex Euclide hæc edidi, variantes, & plerunque meliores in Theonis commentario, pag. 62. lectiones hîc adponā. v. 1. πολλαπλ. v. 4. hæc verba; οἷον, διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. tanquam ab alio adscripta, absunt. v. 7. pro his verbis, καὶ αὐτὸ δεδομένον, habet, λόγον. v. 8. ut & 10. 11. 15. abest particula τὸ. v. 10, recte addita particula τοῦ, legendo, τοῦ τοῦ αβ. v. 11. τελέσιν pro ἤτοι. v. 16. male τοῦ λόγου. ibidem abest verbū ποιεῖ. sed sequente

versu legitur, πρὸς εζ ποιήσει. v.20. τὸ δὲ pro καὶ τό. v.27. ἐστιν pro ἐστί. v.28. ἐπεὶ καὶ pro ἐπειδή. v.34. verba, καὶ ἔστω ταῦτα, desunt. Pag. 26. v.2. pro ἐστὶ τριπλάσιον, auctius ita recte legitur: τριπλάσιον ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ηθ τοῦ εζ ἐστὶ τριπλάσιον. καὶ ὅλον. *tripla propter eadem & GB ipsius EF tripla est. Ideoque tota.* v.3. ἐστίν. v.5. σύγκειται pro συνῆπται, omisso v. 6. verbo συγκείμενος. nec tamen mala ea lectio est, quam & ipse Theo deinde habet v.28. v.7. recte, τοῦ τοῦ αβ πρὸς τὸ γδ λόγου, καὶ τοῦ τοῦ γδ πρὸς εζ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἔλαττον ἢ ἑκατέρου τῶν αβ, εζ τὸ γδ, τὸ αὐτό. v.24. τοῦ εζ ἥμισυ, recte omisso ἐστί. deinde, οἵων ἄρα ἐστί. sed male, ἴσον. & v.25. male γ pro γδ. v.26. ἡμιόλιον ἔσται. v.28. & pag. 27. v. 8. συνῆπται rescripsi pro συνῆκται, quod uterque perperam habet. v.30. legendū, τοῦ τοῦ αβ. quamvis posterius uterque omittat. deinde, πρὸς γδ λόγου, καὶ τοῦ τοῦ γδ πρὸς εζ.

Pag.27. v.3. abest ἐστί. v.13. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πλ. intermediis omissis. v.15. male, ὡς ὅτι. v. 17. perperam, διαιρεθῇ. ut & ἄκρων pro ἁπλῶν. Deinde, ὁ λοιπός. &, καταλειφθήσεται.

Pag.28. v.6. vocula ἐφεξῆς est inepta. ideoque delenda.

Pag. 29. v. 7. πολλαπλασιασθήτωσαν.

Pag. 30. v. 16. ἐλαχίστοις scribendum pro ἐλαχίστη. *paucissimis* pro, *minima*. v.25. pro πλεῖον lego πλείω, vel πλείονα.

Pag. 31. v. 8. lego, διπλάσιον, ὃν ἔχει πρὸς τὸν δ', τουτέστι. *duplam, quam habet ad IV, hoc est, ad secundum* (scil. terminum.) v.24. pro ἐστὶ scriberem ᾖ. v.27. addidi voculam τοῦ.

Pag. 32. v. ult. scribe, γεγονέτω.

Pag. 33. v. 4. pro πλείους lego πλείω, scilicet μεγέθη, vel μέρη. non autem, πλεῖον, scil. μέγεθος. v. 35. scribe, autem.

Pag. 38. v. 28. ante ἴσον in Edito exemplari vocabulum διάλημμα insertum legitur. quod ex margine, in quo forte adscriptum fuerat, in textum male irrepsit. Similiter versu ultimo, perperam in Edito legitur, τὸ (ἴσον. pro quo forsan ἴσως scriptum fuerat, quod vocabulum ἐπίταγμα excidisset.) ἐπίταγμα.

Pag. 39. v. 11. vocabulo πολλαπλάσιον Eutocius excludit rationem duplam; quod hoc casu scribendum fuisset v. 15. τὸ λοιπὸν τὸ ΓΑ ἴσον ἔσται τῷ Δ.

Pag. 40. v. 16. scribe puncto transposito. *Propter componenti ergo etiam.* v.27. pro καὶ, vertendo legi ἔσται.

Pag. 42. v. 16. pro αζ editus male, τὴν αβγ. v. 20. scribe, τμήματι.

Pag. 43. v. 12. quædam, ut superflua, omisi. Ita enim codex editus. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ θζ πρὸς ζβ· ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ ηζ πρὸς ζδ. ἔσται καὶ ὡς.

Pag. 44. v. 10. pro θζ editus male κζ. Hunc locum ex Eutocio restitui.

Pag. 47. v. 14. editus male, θγ. διπλάσιόν ἐστιν ὁ τοῦ.

Pag. 48. v. 11. post ὁ editus perperam additam habet particulam δὲ. v. 21. pro ὑπὸ male habet ἀπὸ.

Pag. 49. v. 11. editus ὑπὸ.

Pag. 52. v. 21. vocabulo expuncto scribendū: μετὰ γὰρ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τῷ. quod vertendo indicavi.

Pag. 53. v. 15. pro ὁ A ἄρα, editus male, ὁ A E.

Pag. 55. v. 24. quæ uncis inclusa sunt, in Græco exemplari deerant.

Pag. 56. v. 1. & 2. editus τὴν male pro τόν. v. 7. addo encliticam τε, ut fit ἔκ τε.

Pag. 57. v. 28. 30. 33. editus τὸν perperam pro τό.

Pag. 59. v. 3. editus male κωνικῶν. v. 28. enclitica τε videtur delenda. v. 32. scribe, παραλληλόγραμμα, *parallelogramma*.

Pag. 60. v. ult. reponendum, aut saltem subaudiendum, δεῖ δεῖξαι.

Pag. 61. v. 30. editus perperam, ὡς δὲ τοῦ.

Pag. 63. v. 11. addidi κύβου. explicatius quoque legeretur addito vocabulo, διπλάσιος μέν ἐστιν λόγος ὁ.

Pag. 66. v. 9. legendum videtur, ὃ ταυτὸν.

Pag. 70. v. 13. scribe, *superoctogesima*.

Pag 76. v. 26. magnitudines.

Pag. 77. v. 13. scribe, ∷.

Pag. 78. v. 19. nescio quo errore in Euclidis definitione omissa sint verba, ἐφ' ἑαυτὰς, *in se*, quæ in utraque Græca editione leguntur, hoc modo: πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, *quantitates inter se multiplicatæ*. Quare non tantùm Eutocius, quod versu penultimo scripsi, sed & ipse Euclides; si ipsius hæc definitio fuerit; hæc verba addidit. Hoc quoque deinde significavi pag. 95. v. 27.

Pag. 80. v. 2. *spectata* pro *spectatarum*.

Pag. 84. v. 2. scribe *cum* pro *eum*.

Pag. 87. v. 13. scribe *quam* pro *quem*.

Pag. 94. v. 25. *excessivam* dixi pro *differentialem* quod nondum id vocabuli eo usu adhibuissem, quo defectivæ rationi opponitur.

Pag. 98. Hac demonstratione Euclideam rationes compo-

nendi methodum explicui, præcipue hac de causa, quod compositæ rationes eadem operatione in duas æquales dividantur. Hoc autem magno usui in sequentibus esse potuisset, si ea quæ mihi proposueram, hoc tractatu explicassem. Cæterum explicite monstrare potuissem, rationem ipsius O E ad E M compositam esse ex rationibus A B, C D. Quoniam enim ductâ magnitudine A in D; aut C in B; quadrata ab A B, C B sunt in ratione A ad C, item quadrata CB, CD in ratione B ad D. &c.

Pag. 99. v. 3. *monstrare* dixi, etiam cum Euclide. quamvis usitatius problema concludat verbo *facere*. Pag. 117. v. 23. scribe, Mævii ad Nonium. v. 25. scribe, $\frac{9}{6}.\frac{6}{6}|\frac{9}{6}$. Pag. 119. v. 4. proplores. Pag. 121. v. 21. subquadruplæ. Pag. 136. v 2. illis. v. 3. omnis. Pag. 146. 9. celeritas, pro celeritatis. Pag 152. v 6. $\frac{14}{5}$ pro $\frac{4}{5}$. Pa. 160. v. 23. constituendo pro componendo. Pa. 161. v. 19. nulla. v. 24. me. v. 27. Itaque. v. 29. genus. Pag. 164. v. 7. subsesquialtera. Pag. 167. v. 23. $\frac{1}{64}$ pro $6\frac{1}{4}$. Pag. 171. v. 7. scribe, 5 ad 3. v. 11. significare. Pag. 191. v. 13. scribe, rationem.

Sequentia duo in V. Elementum Scholia, ut omnia Græce & Latine haberentur, hîc adponenda duxi.

Μέρος] Κατὰ μὲν τοὺς πολλοὺς μέρος ἐστὶ τὸ τοῦ ὁμοειδοῦς ἔλαττον· οἷον ὁ γʹ τοῦ εʹ. κατὰ δὲ τὸν γεωμέτρην, τὸ μετροῦν τὸ μεῖζον ἰσάκις, τουτέστιν, ὅταν τὸ καταλειπόμενον ἴσον ᾖ τῷ καταμετροῦντι· ὅταν δὲ τὸ καταλειπόμενον μὴ ἴσον ᾖ τῷ μετροῦντι, τὸ μετροῦν οὐκ ἔστι μέρος, ἀλλὰ μέρη. οἷον, ὁ γʹ μετρῶν τὸν εʹ, καταλιμπάνει δύο, ἅπερ οὐκ ἔστιν ἴσα τῷ γʹ. διόπερ τὰ γʹ οὐκ ἔστιν μέρος τοῦ εʹ, ἀλλὰ μέρη. τρία γὰρ πέμπτα.

Σύνθεσις λόγου] Οἱ νεώτεροι τοῦτον προσέθηκαν τὸν ὅρον. οὐδὲ γὰρ σύνθεσις μεγεθῶν ταυτόν ἐστι τῇ τοῦ λόγου συνθέσει. ἐνταῦθα γὰρ τὸ ἡγούμενον μετὰ τοῦ ἑπομένου συντιθέμενον, μέγεθος μεγέθει, τὸ ὅλον μέγεθος ποιεῖ συγκείμενον ἐκ μεγεθῶν, ἴσων τοῖς συγκειμένοις. ἡ δὲ τῶν λόγων σύνθεσις ἄλλον ποιεῖ λόγον, ὡς αὐτὸς ἐν τοῖς ἑξῆς ἐρεῖ. λόγος γάρ φησιν ἐκ λόγων συγκεῖσθαι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὡς δ᾽ ἐγὼ ἐν τοῖς παλαιοτέροις εὗρον βιβλίοις, τὴν σύνθεσιν ταύτην συντεθέντα λόγον λέγει. καὶ γὰρ πρὸ (legerem περὶ) τῶν ἐν τοῖς θεωρήμασιν ὁ στοιχειωτής, συντεθέντι φησίν. ὅμως καὶ οὕτως κειμένου. πάλιν ἐκ τοῦ συντεθέντι σύνθεσις νοεῖται. οἶμαι δὲ κρεῖττον εἶναι, λέγεσθαι σύνθεσιν ὅρων, καὶ μὴ λόγου. ὅρους δὲ λέγω αὐτὰ τὰ ἐκκείμενα μεγέθη, καὶ οὐχὶ τὴν σχέσιν, ἣν ἔχουσι πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ διαίρεσις, οὐ νοεῖται λόγου διαίρεσις. ὡς φέρε εἰπεῖν, διπλασίου εἰς ἡμιόλιον καὶ ἐπίτριτον ἢ τριπλασίου, εἰς ἡμιόλιον καὶ διπλάσιον. ἀλλὰ διαίρεσις τῶν μεγεθῶν. ἡ γὰρ ὑπεροχὴ τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἑπόμενον θεωρεῖται πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Τεταραγμένη] ὡς ὁ ηʹ πρὸς τὸν δʹ, ὁ ϛʹ πρὸς τὸν γʹ. ὡς δὲ ὁ δʹ πρὸς τὴν μονάδα, ὁ κδʹ πρὸς τὸν ϛʹ.

Pars] Ex multorum sententia pars est, quod, cum ejusdem speciei sit atq; aliud, eo minus est; ut ternarius quinarii: at secundũ Geometram, quod metitur majus æqualiter, hoc est, cũ id quod relinquitur æquale fuerit metienti. Sed cũ id quod relinquitur non fuerit æquale metienti, metiens non est pars, sed partes: ut, ternarius mensurans quinariũ, relinquit binariũ, qui æqualis non est ternario. Quare III nõ est pars ipsius V, sed partes; nempe 3 quintæ.

Compositio rationis] Juniores hanc definitionem addidére. Neq; enim magnitudinum compositio eadẽ est quæ compositio rationis. Hîc e. antecedens addita consequenti, magnitudo magnitudini, totã magnitudinẽ facit constare ex magnitudinibus, quę æquales sunt iis quæ adduntur. At rationũ compositio aliam facit rationem, ut ipse postea dicet. *Ratio* enim ait, *ex rationibus constare*, & cætera. ut autem ego in vetustioribus exemplaribus inveni, cõpositionem hanc componenti rationẽ vocat. quippe de iis quæ in theorematis hic elementarius doctor monstrat, componenti inquit. tamen cũ vel ita hæc posita est, rursus ex componenti compositio intelligitur. Melius autem esse puto, ut dicatur compositio terminorum, non autem rationis. Terminos autẽ dico ipsas expositas magnitudines, non autem, quã inter se invicem habent, relationẽ. Similiter quoq; divisio, nõ intelligitur rationis divisio; exempli gratia, duplæ rationis in sesquialterã & supertertiã: aut triplæ, in sesquialteram & duplã; sed divisio magnitudinum. Excessus e. antecedentis sup. consequentẽ spectatur ad ipsam co.

Perturbata] ut VIII ad IV, ita VI ad III. Sed ut IV ad I, sic XXIV ad VI.

F I N I S.

MARCI MEIBOMII

DIALOGUS
De
PROPORTIONIBUS.

Colloquuntur Euclides, Archimedes, Apollonius Pergæus, Pappus, Eutocius, Theo, Hermotimus.

EUCLIDES.

TAntane verò temeritate ac insolentia mortales ferri possunt, ut nostram quoque quietem nugis suis molestare suscipiant! nisi novum hunc veri indagandi modum, qui ab uno exemplo latius serpere posʃit, statim in ipso ortu opprimamus, omnes mortalium in literarum studiis rixæ, ac vaniʃsima sæpe somnia, & deliria, quæ non tam beatas mentes, quam mortalium animos turbare nata sunt, ad nos devolventur. ARCHIM. Quid novæ sollicitudinis, ô Euclide, te hîc adfixum tenet, qui divinis contemplationibus plenus, hunc amœnum campum intrare, aliisq; sociatus, naturæ invariatas leges, quas in linearum, superficierum ac corporum dimensionibus, mortalibus pariter atque immortalibus

difcendas propofuit, expendere foles? Age vero, & ad illud mecum nemus amœnifsimum contende, ex quo huc adventantes vides Apollonium noftrum, & Pappum, & Eutocium atque Theonem, aliasque mathematicis contemplationibus deditas animas, ut diviniore quodam ftudiorum noftrorum argumento oblectemur. EUCL. Vix hoc à me impetrabis, ô divine Archimedes, quod aliud jam volvere, ac defuetas curas refumere, ifte me follicitet Hermotimus. Quem fi femel admiferimus, jam de ftudiis noftris actum. Nec minores olim nobis turbas mathematici ifti daturi funt, quam Plutoni, regi noftro, & inferis dederunt Thefeus, Hercules, & cætera audaciæ exempla, qui vivi ad nos penetrarunt. Nam non tantum de circuli quadratura, in qua invenienda & eximii quidam mathematici laborarunt, novas & diftortas demonftrationes quotidie nobis examinandas deferent; aliisq; difficilioribus problematis molefti erunt; fed incredibilem fciolorum audaciam, in fcientiarum noftrarum contemtum natam, quotidie execrabimur. Qui mechanici folertes haberi volunt, cum proportionum doctrinam non deguftarint: qui fine Geometria, fine Arithmetica, quibus & divinam mentem in rerum omnium conformatione ufam fapientes adferunt, folo proportionis circino, ut vocant, armati, inaudita ubique facinora patrant: qui inftrumenta nova quotidie fabricant: qui Neptuno horrorem incutiunt, ac gentibus exitium minantur, dum naves volare docent. Sic Mathematicas difciplinas, quas hactenus ἀπλαίστους καὶ ἀμετακινήτους, adamantinis fundamentis fuper-

ſtructas, nec motum, nec caſum vereri, omnium ſeculorum conſenſus judicaverat, vix inter probabiles cenſeri videbis. Quæ enim diſciplina, quæ vel veritatis umbram ſibi adrogare audeat, tam fœdos lapſus experta eſt, quam binis ultimis ſeculis noſtra matheſis. Adeo ut, cum quotidie de hujusmodi rebus ad nos perferatur, argumentis certiſsimis confirmemur, audaciores fieri homines, non ſapientiores. Quis Pythagoran nunc inter mortales æſtimat, quis Platona? Quis ad veram ſapientiam ſevera noſtrorum temporum lege contendit, cum absque mathematicarum ſcientiarum accuratiore notitia ad naturæ arcana penetrare velle, piaculum cenſeretur. Nunc pueris ſapientiam induunt, ut primis ſtatim annis initiati, de omnibus naturæ myſteriis, tanquam myſtæ illius, & ſummi arcanorum ſacerdotes, pronuncient. Priſcis temporibus; cum nondum quotidianis diſputationum febribus adoleſcentes laborarent; multa in diſciplinis noſtris exercitatione robur ingenia adquirebant, ut ad ſublimium rerum indagationem ſufficerent. Cum ingentis gloriæ ſtimulis incitati, tam reges quam ſubditi, ſi inventis quibusdam poſteritati æternam ſui memoriam commendare poſſent, inquirebant; quod ingenium auro tanto præſtantius judicarent, quanto terrenis cœleſtia excellentiora cenſentur. Itaque multi clari viri, & in noſtris ſtudiis exercitati ad nos commeabant; nunc, poſtquam mechanicorum audacia matheſeos compendiariam invenit, vix vicenis annis ſinguli Geometræ ad nos veniunt. Ex iis enim qui ſe mathematicos dicunt, nec milleſimum quemque conſortio

nostro dignum judicamus. Sed & nos isti fugiunt, & in abdita loca se conferunt, ut propugnacula extruant, & rursus destruant. qui tametsi Sisyphi saxo majus volvant, adeo tamen nugis suis animantur, ut nihil præclarius ab ullis aliis agi posse existiment. Et quidem nosti, quanta experimentorum vanitate tempus consumant, cum non ratione & legibus Geometricis, sed casu veritatem deprehendere conentur. ARCHIM. Nimia vehementia in corruptam studiorum regulam declamas, & simul mea quoque vulnera refricas. Quis vero ille, qui novus huc nostris successit sedibus hospes? num Orphea imitaturus, animas ad superas auras educere conatur, teque, ut omnis matheseos callentissimum, ita Musices arcana doctum, de modis, quos citharæ adtemperare debeat, consultum venit? EUCL. Nihil minus. nostra vero quædam Elementa Geometrica, quæ tot seculis homines, tanquam immota veritate nixa, pro certissimis oraculis habuére, convulsum venit, meque sollicitat, ut ad subversionem illorum primus sententiam feram. Nova quædam de Proportionibus inventa, quæ ex Euthymio se didicisse ait, nobis exponet: illa autem, sola veritatis indagandæ cupiditate inductum, nobis, ut acerrimis censoribus examinanda prius proponere se voluisse, quam iis adsentiret. ARCHIM. Audax vero illius Euthymii facinus, & inauditum, novo exemplo castigandum. Nec tamen propterea tot curis involvi te oportuerat. Ferendæ illæ sunt, ô Euclide, mortalium injuriæ, & linguæ libertatem ac censuræ omnibus concedere, etiam indoctis, debemus. Quid mihi nuper acci-

derit, probe, puto, adhuc meministi. Impotenti animo nomini meo insultarat Jos. Scaliger, & famam divini Mathematici, quam cum effectis ipsis & operationibus, tum scriptis, seculorum omnium consensu, fueram consecutus, convellere non dubitarat. Illa inventa mea, quæ doctis omnibus, tanquam alter Prometheus, è cœlo suffuratus esse credebar, quæ omnibus adorabantur, vir ille, cætera quidem summus, sed in nostris literis pene infans, qui eruditum illum pulverem vix digito contigerat, traducere cœpit, ac ineptis suis inventis posthabere. Nosti qvanta consternatione recentes tum Mathematicarum animarum, quæ ad nos pervenerant, nuncios audiverim. Sed vix facinoris audaciam narraverant, cum alii advenirent, qui præstantiores Mathematicos famam nostram contra vanos ipsius insultus ac conatus adseruisse dicerent. Quanto deinde gaudio illis defensoribus meis, cum ad nos descenderent, occurrerim, quanta cum congratulatione illos exceperim, omnes vos, ô præstantissimæ animæ, nostis, cum etiam in hoc usque tempus, cum omnium vestrûm, tum in primis mea consuetudine delectentur. Nec tamen mea indignatio tanta fuit, ut non doctissimo alias homini ignoscere potuerim, cum in conspectum nostrum veniret, & verecunde veniam delicti peteret. Cum enim certum sit, & notum doctis omnibus, periculosam æque ac laboriosam esse arenam, in qua se mathematici exercent; res autem, quæ ab illis investigantur, ob certitudinem suam diviniores quasq; animas, & quas ex meliore luto finxit Titan, in sui admirationem, etiam invitas ferme, abripere; inde fit, ut mortales,

omnium noſtrûm nimis fervido zelo æmuli, immortalitatem ex novis ſuis in hoc pulvere inventis conſequi anhelent. Et vero, quis unquam conatum honeſtæ rei conſequendæ, & qua non minus omnem ſibi poſteritatem demereri mortales poſsint, quam ſummum illud numen venerari, vituperandum ſtatuit? Ut vires egregii incepti perficiendi defuerint, voluntas tamen ſemper laudem apud æquos cenſores meruit. Atque hoc quidem magis audiendum cenſeo hunc Hermotimum, quo ab omni convitio ipſius inſtitutum alienius eſſe videtur. Si nova quædam ex Euthymio ſuo de proportionum doctrina, quam totius Geometriæ, imo rerum naturæ, nobiliſsimam nos cum omni antiquitate ſtatuimus, audiſſe dicit, & quæ præcipua quædam Geometriæ elementa, adeoque noſtra inventa, quæ illis ſuperſtructa ſunt, convellere poſsint; non ignoras, omnium noſtrûm famam, & doctrinæ ſoliditatem, cum tua vel ſtaturam; quemadmodum quidem nos opinamur, in omne ævum, & quamdiu hiſce legibus ſummus rerum opifex machinas illas circumvolvi voluerit; vel ineluctabili quodam fato hoc tempore ruituram. Tantum vero abeſt, ut huic homini ſuccenſendum putem, qui priſca exempla, ſed diverſo conſilio, ſecutus, ad nos deſcendit, ad dogmatis veritatem à nobis primis hauriendam, ut contra magna ipſum laude, & meliore laboris præmio, quam ullus alius retulit, dignum cenſeam. Primi nunc in cauſa noſtra erimus judices, & oracula vel dabimus, vel accipiemus. Tu modo æquo animo adeſſe velis, & tuam non minus, quam Eudoxi, qui illa de proportionibus elementa

in primis concinnavit, doctrinam defendere. Me vides ad hoc promtissimum. & vobis quoque, præstantissimæ animæ, & non minus inter mortales, quàm hîc inter beatas animas æternum triumfaturæ, non fore ingratum illud spero. Apollo. Mihi vero erit gratissimum, ô divine Archimedes, quidquid tibi & Euclidi hac in re faciendum videbitur. &, ut videtis, impatientia quadam feruntur cognoscendæ hujus novæ doctrinæ & Pappus, & Eutocius ac Theo, dum se illi mortali Hermotimo, quamvis tristiores primum, & consortium illud abhorrentes, adplicare studuerunt. Eucl. Cum vobis omnibus idem placere videam, agite admittamus novum illum hospitem, & nova dogmata ferentem, ut illius Euthymii ineptias ex uno omnes discamus. Vos verò, cum communis causa agatur, ad singula quæ expositurus est, diligenter attenturos, nullus dubitare possum.

Hermot. Quamquam quod vos, beatissimæ animæ, atque omnis certæ eruditionis lumina, amœnissimo hoc loco compellare possim, in summa felicitatis meæ parte pono; nullam tamen majorem erga me benevolentiam à vobis proficisci posse credite, quam si de iis, quæ sine ullo obtrectandi animo, ac divina scripta vestra lacerandi, propositurus venio, me benigne audiatis. Veritatis studium, quo quidem nihil summo numini gratius, nihil humano ingenio dignius, inveniri existimo, in me summum deprehendetis. Et vos quidem, quos hujus doctrinæ veritas aut falsitudo maxime tangit, in primis consulendos statui, quod & acerrime in illam inquisituri sitis, & æquissime de illa judicaturi.

adeoque si vera hæc doctrina invenietur, vestro calculo adprobata, mortalium usibus inserviet; sin falsa, vestram solorum reprehensionem incurret. Omnia autem, quæ de hac doctrina edoctus sum à meo Euthymio, continua narrationis serie, quam pro libitu ingeniosis vestris objectionibus interrumpere potestis, vobis sum expositurus. Cum itaque his hiemalibus diebus post meridiem ad ipsum invisissem, nunc, inquiebam, hora tertia est, & tenebræ ingruunt. quid si toties à te promissam doctrinam de proportionibus jam ex te audire possim? Nihil gratius unquam feceris; & acerrimum hocce frigus ad luculentum focum nos invitat, cui adsidentes seriis sermonibus hanc vesperam extrahemus. Ad quæ cum pauca pro more respondisset Euthymius, petitioni meæ satisfacturus, ita disserere incepit.

Divina res est proportio, quam in universa natura colliganda, ac apte componenda Deum inspexisse sapientes tradiderunt. Cujus immensam varietatem ex naturæ universitate metiri debemus. Nam & ad cœlestia, quæ pulcherrimis rationibus compaginata sunt, se extendit; & terrestrium varietatem, certis legibus vinctam, comprehensioni nostræ subjicit. Quarum rerum considceratione nec sublimius quid ab humana mente suscipitur; nec utilius, ad omnia vitæ munia recte obeunda. Quod nec Deo, qui in universa natura se expressit, quidquam possit esse gratius, quam si in ipsa consideretur; nec mortalibus quidquam majorem felicitatem conferre possit, quam si se ipsos, id est, tam animi quam corporis vires mensurent, & relationem sui cum ad cœlestia, tum

ad terrena ſcrutentur. Cujus rei contemplatio hominem ſapientem reddit; & plena cognitio, Deo immortali ſimilem. Sapientis itaq; eſt, naturæ veſtigiis inſiſtere, ac rerum omnium rationē, ac compaginationem, recta mentis acie intueri. Neq; enim Mathematicis ſolis relicta eſt proportionum conſideratio; quamvis primi naturam illarũ in numeris & lineis, ſimpliciſsimo modo, inveſtigarint. In quo & Pythagoræ divinum ingenium emicuit; & Eudoxi ſolertia, qui quintum Elementorum Geometriæ librum in primis concinnavit, ab antiquitate eſt laudata. Sed, ſi dicere auſim, ad rei veritatem, quod naturæ veſtigiis non inſiſterent, in hac contemplatione non omnino penetrarunt. Quædam autem, quæ veteres recte docuerant, ſiniſtra recentiorum interpretatione ſunt depravata. Itaque & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; & antiquos corrigam, quí male quædam prodiderunt; utroſque inſuper nova docturus. Atq; his cognoſcendis cum te intentum, inquit, ô Hermotime videā, ordine omnia tibi recenſere conabor.

Ratio, quæ Græcis λόγος dicitur, ſecundum quam hoc ad illud rationem habere adfirmamus, duorum ejusdem generis terminorum inter ſe certa relatio definitur. Euclidi: duarum magnitudinum ejusdem generis, ſecundum quantitatem, mutua quædam relatio. Ejuſdem generis additur, quod longitudines cum longitudinibus tantùm comparationem ſuſtineant, ſuperficies cum ſuperficiebus, ſolida cum ſolidis, liquida cum liquidis, vox cum voce, tempus cum tempore. At quæ diverſi generis ſunt, quomodo inter ſe ſint comparata, ſcire

non datur: ut puta, cubitus ad aureum, album ad dulce. Illa autem duorum terminorum, ſeu duarum magnitudinum mutua relatio, & comparatio, tantùm fit ſecundum magnitudinem, ſeu quantitatem. quod bene in ſua definitione expreſsit Euclides. Alias & pater ad filium relationem habet, & amicus ad amicum, & dextrum ad ſiniſtrum; ſed non ſecundum magnitudinem. Breviter & nervoſe Euclidis definitionem, & ſequentium aliquas, Scholiaſtes Græcus explicavit, cujus pleraque Commandinus, in Latinum ſermonem à ſe verſa; ſed minus rectè, ſæpe & mutile; ſuæ editioni adjunxit. Græca verba, ut à Daſypodio edita ſunt, quod in ſequentibus nobis uſui eſſe poſsint, tibi proferam.

Λόγος] Τὸ μὲν λόγος προσέθηκεν, ἵνα σημαίνῃ τὴν σχέσιν. τὸ δὲ δύο μεγεθῶν, ἵνα χωρήσῃ τῶν ἄλλων εἰδῶν τοῦ ποσοῦ. τὸ δὲ ὁμογενῶν, ἵνα μὴ γραμμὴν πρὸς ἐπιφάνειαν συγκρίνῃ τίς. ταῦτα γὰρ ἄλογα πρὸς ἄλληλα. τὸ δὲ κατὰ πηλικότητα, ἵνα χωρήσῃ τῶν ἀπείρων μεγεθῶν. πηλικότης γάρ τὸ πέρας ἐστὶ τοῦ συνεχοῦς ποσοῦ· καὶ ποσότης, τοῦ διωρισμένου. τὸ γὰρ διωρισμένον ποσὸν, οὐ μέγεθος. πλῆθος γάρ. τὸ δὲ ποιὰ σχέσις, ὅτι πέντε εἰσὶ τὰ εἴδη τῶν σχέσεων.

Ratio] *Duo* addidit, ut ſignificaret relationem. *magnitudinum*, ut ab aliis quoti ſpeciebus ſepararet. *ejusdem generis*, ne quis lineam cum ſuperficie compararet: hæc enim nullam inter ſe rationem habent. *ſecundum quantitatem*, ut ſepararet ab infinitis magnitudinibus. Quantitas enim terminus eſt continui quoti; & quotitas, diſcreti. quippe diſcretum quotum non eſt magnitudo, ſed multitudo. *certa quadam relatio*, quoniam quinque ſunt relationum ſpecies.

Inepta hæc ſunt initio, adeoque corrupta. Pro, *τὸ μὲν λόγος*, vertendo legi, *τὸ μὲν δύο*. Deinde ejectâ

voce δύο, ſcribo, *τὸ δὲ μεγεθῶν*. Porro *ποσὸν* verti *quotum* potius quam *quantum*. ne cum *πηλίκον* id confunderem. Differunt enim Mathematicis *τὸ πηλίκον*, & *τὸ ποσόν*. quod *τὸ πηλίκον* ad quantitatem, ſeu potius, quotitatem continuam referatur; *τὸ ποσὸν*, ad diſcretam. quomodo & in hoc ſcholio accipiuntur *πηλικότης* & *ποσότης*. ideoque hoc ultimum novo vocabulo, neceſsitate adductus, verti *quotitas*. Sequitur aliud ſcholium, quo vocabulum *ὁμογενῶν* explicatur.

Ejusdem generis] *Ejusdem generis* dixit, quod, quæ diverſi generis ſunt, non poſſint inter ſe habere rationem. neque enim linea ad ſuperficiem, neque ſuperficies ad ſolidum, rationem habere poteſt; ſed linea ad lineam, & ſuperficies ad ſuperficiem, & ſolidum ad ſolidum. *Magnitudinum* additum eſt, ut ab iis diſtingueretur, quæ relationem inter ſe non habent; certe non eam, quæ eſt ſecundum magnitudinem: cujusmodi relatio eſt patris ad filium; amici ad amicum; dextri ad ſiniſtrum. Dicitur & alias, relatio ſecundum exceſſum & defectum.

Ὁμογενῶν] Ὁμογενῶν εἶπεν, ὅτι τὰ μὴ ὁμογενῆ οὐ δύναται ἔχειν λόγον πρὸς ἄλληλα. οὔτε γὰρ γραμμὴ πρὸς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν, οὔτε ἐπίπεδον πρὸς στερεὸν δύναται λόγον ἔχειν· ἀλλὰ γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, καὶ ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον. τὸ δὲ μεγεθῶν πρόσκειται, ἐκ διορισμοῦ τῶν σχέσιν μὴ ἐχόντων πρὸς ἄλληλα. οὐ μέντοι τὴν κατὰ μέγεθος· οἷον, πατρὸς πρὸς υἱόν. καὶ φίλου πρὸς φίλον. καὶ δεξιοῦ πρὸς ἀριστερόν. λέγεται δὲ καὶ ἄλλη σχέσις κατὰ τὸ ἔχειν καὶ ἐλλείπειν.

Et hîc quædam ſunt corrupta. Lego ſimpliciter, *οὔτε γὰρ γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν, οὔτε ἐπιφάνεια πρὸς στερεόν.* neque enim quidquam attinet, num plana ſit ſuperficies, an rotunda. Deinde lego, *καὶ στερεὸν πρὸς στερεὸν*, pro *καὶ*

ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον. Cujus emendationis ratio est manifesta. In fine pro *ἄλλη* lego *ἄλλως*, & *ὑπερέχειν* pro *ἔχειν.*

Rationem autem generaliter omnes magnitudines inter se habere Euclides dicit, quæ si multiplicentur, se invicem superare possunt. Ideoque & earum magnitudinum inter se ratio est, quæ numeris exprimi non possunt. Egregium est in hanc definitionem scholium.

Λόγον ἔχειν] Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ. ἔστι γάρ τινα, ὧν μόνη μὲν γινώσκεται ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχὴ, ἡ δὲ ποσότης ἐστὶν ἄγνωστος. ταῦτα τοίνυν λόγον λέγεται ἔχειν τῆς ὑπεροχῆς, οὐκέτι δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τουτέστι, ῥητόν. καὶ διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν, τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς, καὶ κατὰ πηλικότητα, καὶ κατὰ ποσότητα ἐστίν· οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα, καὶ ῥητός. καθολικώτερον οὖν ὁριζόμενος τὰ τῶν λόγων τίνα ἐστὶν, ἐπήγαγεν, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. ἐφαρμόζει γὰρ καὶ τῷ ῥητῷ, καὶ τῷ μὴ ῥητῷ. οἷον,

Rationem habere] In numeris omnis ratio effabilem habet quotitatem: at in magnitudinibus ratio quædam est, quam numero effari nequeamus. Sunt enim quædam, quarum solus scitur excessus, si ad aliam referantur; at quotitas ejus est ignota. Hæ igitur rationem excessus habere dicuntur; non autem quam numerus ad numerum habet, hoc est, effabilem. Idcirco in definitione rationis magnitudinum addidit, *secundum quantitatem.* Omnis quippe ratio effabilis & in quantitate est, & in quotitate; at non item omnis ratio, quæ in quantitate, etiam est effabilis. Universalius igitur definiens, quæ sint rationum magnitudines, subjunxit, quæ, si multiplicentur, se invicem superare possunt. Hoc enim congruit & effabili rationi, & ineffabili. ut puta,

quadrati diametrus, ut in effabilibus numeris considerata, ad latus est irrationalis; sed, ut in excessu, rationem habet, quam major quantitas ad minorem. Et quandoque latus, si multiplicetur, diametrum superare potest.

ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος, ὡς μὲν ἐν ῥητοῖς λόγοις, πρὸς τὴν πλευρὰν ἄλογος· ὡς δὲ ἐν ὑπεροχῇ, λόγον ἔχει, ὃν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ δύναται ἡ πλευρὰ πολλαπλασιαζομένη ποτὲ τῆς διαμέτρου ὑπερέχειν.

Hæc clara sunt, nisi qvod v.2. pro λόγοις scribendum putem, ἀριθμοῖς.

Rationem porro summâ & generali divisione in æqualem & inæqualem Veteres distribuére. Quidquid enim in comparatione ad aliud consideramus, aut æquale illi est aut inæquale. Præter hæc nullum tertium genus datur. Æqualis itaque ratio spectatur, cum eorum, quæ inter se comparantur, alterum, nec superat id ad quod comparatur, nec ab eo deficit: ut 1 ad 1. 2 ad 2. 10 ad 10. cubitus ad cubitum. aureus ad aureum. sonus mese ad sonum mesen. quatuor vini mensuræ ad quatuor mensuras aquæ. Atque hæc æqualis ratio una eademque est, & cæteras omnes antecedit, elementi naturam habens. At inæqualis ratio per subdivisionem secatur in majorem & minorem. Major ratio secundâ subdivisione in quinque species dividitur. Alia enim multiplex est, alia superparticularis, alia superpers; & ex his compositæ duæ, multiplexsuperparticularis, multiplexsuperpers. Minor ratio totidem speciebus ex adverso majori rationi respondet, quas, additâ illis vocabulis præpositione sub, ita enunciamus: submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpers, submultiplexsuperpar-

ticularis, ſubmultiplexſuperpers. Harum definitiones & exempla ſubjungam. Ratio multiplex eſt, cum major terminus ſæpius quam ſemel minorem continet, hoc eſt, cum major terminus à minore perfecte menſuratur, ut nihil ſuperſit: quam rationem ad unitatem obtinent numeri à binario, naturali ordine progredientes. Primus enim binarius, unitatis duplus eſt & dicitur, $\frac{2}{1}$. ternarius, triplus, $\frac{3}{1}$. quaternarius, quadruplus, $\frac{4}{1}$. & ſic in infinitum. Rurſus ſubmultiplex eſt, cum minor eorundum numerorũ refertur ad majorem; quomodo ſubdupla ratio eſt $\frac{1}{2}$. ſubtripla, $\frac{1}{3}$. ſubdecupla, $\frac{1}{10}$. Ratio ſuperparticularis, majoris rationis naturâ & ordine ſecunda ſpecies, eſt, cum major terminus minorem habet, & ejus unam particulam; quæ ſi dimidia fuerit, ratio ſeſquialtera dicitur, $\frac{3}{2}$. ſi triens, ſupertertia, $\frac{4}{3}$. ſi quadrans, ſuperquarta, $\frac{5}{4}$. quinarius enim quaternarium habet, & quaternarii partem quartam, hoc eſt, unitatem. His ex altera parte reſpondent, ſubſeſquialtera, $\frac{2}{3}$. ſubſupertertia $\frac{3}{4}$. & ſic deinceps in infinitum. Superpers ratio eſt, cum major terminus minorem in ſe habet, & inſuper partes unâ plures. quarum rationum prima eſt, ſuperbitertia, $\frac{5}{3}$. Deinde, ſupertriquarta, $\frac{7}{4}$. ſuperquaterquinta, $\frac{9}{5}$. ſuperquinqueſexta, $\frac{11}{6}$. ſuperſexundecima, $\frac{17}{6}$. Quibus ex adverſo minores reſpondent, ſubſuperbitertia $\frac{3}{5}$. ſubſupertriquarta $\frac{4}{7}$. & deinceps reliquæ. Ex his ſimplicibus compoſitæ duæ rationum ſpecies facile intelliguntur, nempe multiplexſuperparticularis, uti eſt duplaſeſquialtera, $\frac{5}{2}$. duplaſupertertia, $\frac{7}{3}$. duplaſuperquarta, $\frac{9}{4}$. triplaſuperſexta, $\frac{19}{6}$. & his ex adverſo reſpondentes minores, ſubdupla-

ſeſquialtera $\frac{3}{2}$. ſubduplaſupertertia $\frac{3}{7}$. Deinde multiplexſuperpers, cujus prima exempla ſunt, duplaſuperbitertia, $\frac{8}{3}$. duplaſupertriquarta, $\frac{11}{4}$. duplaſuperquaterquinta, $\frac{14}{5}$. alia, triplaſuperbiquinta, $\frac{17}{5}$. quadruplaſuperquaterſeptima, $\frac{32}{7}$. quibus minores reſpondent, minore termino ad majorem relato : ſubduplaſuperbitertia, $\frac{3}{8}$. ſubtriplaſuperbiquinta, $\frac{5}{17}$. Harum rationum, quæ minimis & inter ſe primis numeris exprimuntur, primæ in ſingulis ſpeciebus dicuntur, & fundi rationum ejusdem ſpeciei. Cum enim dupla ratio, & primis inter ſe numeris, $\frac{2}{1}$; & compoſitis, $\frac{4}{2}$. $\frac{6}{3}$. $\frac{8}{4}$. contineatur; fundus duplæ rationis dicitur, $\frac{2}{1}$. Sic ex $\frac{3}{2}$. $\frac{6}{4}$. $\frac{9}{6}$. $\frac{12}{8}$; quæ omnes ſunt in ratione ſeſquialtera; fundus eſt, *ϖυθμὴν*, ſeu *ϖυθμενικὸς λόγος*, fundata ratio, $\frac{3}{2}$. quæ primis inter ſe numeris comprehenditur. & ſic de cæteris. Porro & hoc monendum, numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum : cujus rationis eſt limma in Harmonicis, contentum his minimis numeris, 256 ad 243. Eucl. Hæc omnia certa ſunt nec doctrinam noſtram convellunt. Hermot. Certiora tradi poſſunt : ſed hoc poſtea commodiore loco ſum moniturus. Hîc enim, quæ ad ſequentia rectius intelligenda facere dicebat Euthymius, eo qvo ille mihi ordine diſſeruit, vobis recenſeo. Facilius, inquiebat, de novis hiſce dogmatis judicaveris, ſi veterum tibi placita non ignota fuerint. Jam tranſeo ad rationum compoſitionem, ſeu, ut vulgari vocabulo adpellamus, additionem. Sed prius, quæ mihi tradidit, Eutocii & Theonis commentaria, vobis legenda exhibeo.

ΕΥΤΟΚΙΟΣ ΕΙΣ ΤΟ Δ τοῦ β περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ Ἀρχιμήδους.

Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΓ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΛΔ πρὸς ΛΓ· ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς ΛΔ μέσης λαμβανομένης, ὡς κἂν τῇ στοιχειώσει ἐλαμβάνετο, φανερόν. ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως, καὶ οὐχ οὕτως ὥς τε τὴν ἔννοιαν ἀναπληρῶσαι λέλεκται, ὡς ἐστὶν εὑρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι, καὶ Ἀρκαδίῳ, ἐν πολλοῖς συντάγμασιν, οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδὲν ἄτοπον πρὸς βραχὺ διατρίψαντας τῷ λόγῳ, τὸ σαφέστερον παραστῆσαι. φημὶ τοίνυν, ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος, σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον. ὑπομνηστέον δὴ πρότερον, πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσιν τινὰ πηλικότητα δηλονότι λεγο-

EUTOCIUS COMMENTARIO in IV. propos. II. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

Quoniam igitur ratio RL ad LC conjuncta est ex ratione quam habet RL ad LD, & LD ad LC; inde quidem, rationum compositionem hîc accipi, sumptâ media LD, quomodo & in Elementis accipiebatur, est manifestum. Hoc ipsum autem, quoniam inarticulate dictum est, nec ita, ut sensum expleat; uti deprehendere possunt qui Pappum legunt, & Theonem, & Arcadium, qui in multis libris non demonstrative, sed inductione hoc ipsum probant; non inconveniens fuerit paulisper huic sermoni immorari, ut hoc ipsum manifestius reddamus. Dico igitur, si inter duos numeros, duasve magnitudines, medius aliquis terminus sumatur, ab initio sumtorum numerorum rationem componi ex ratione, quam habet primus ad medium, & eâ, quam habet medius ad tertium. Hoc autem prius in mentem revocandum, quomodo dicta sit ratio ex rationibus componi. nempe ut in Elementis; Quando rationum quantitates in seipsas multiplicatæ aliquam rationem faciunt. cum scilicet quan-

titas dicitur numerus, à quo data ratio denominatur: uti dicunt, cum alii, tum Nicomachus libro primo de Muſica; & Herona, commentario in Arithmeticam Introductionem. Quod idem eſt ac ſi quantitas illa dicatur eſſe numerus, qui, ſi in ſequentem rationis terminum multiplicetur, efficiat antecedentem. Cæterum magis proprie in multiplicibus rationibus quantitas illa ſumetur; cum in ſuperparticularibus, aut ſuperpertibus quantitas ſumi nequeat, ita ut indiviſa maneat unitas. quare in iis unitas eſt dividenda: quamvis id non Arithmeticæ, ſed Logiſticæ conveniat. Dividitur autem unitas ſecundum partem, aut partes, à quibus ratio eſt denominata: ut ſit, accuratius loquendo, ſeſquialteræ rationis quantitas, præter unitatem inſuper unitatis dimidium; ſupertertiæ autem, præter unitatem adhuc tertium. Adeo ut, quemadmodum & ſuperiùs dictum eſt, rationis quantitas, cum in conſequentem terminum multiplicatur, faciat antecedentem. Novenarii enim ad ſenarium, ſeſquialteræ rationis, quantitas, quæ eſt unitas & dimidium, multiplicata in vi, facit ix.

μένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὥς φασιν ἄλλοι τὲ καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ τῷ περὶ μουσικῆς. καὶ Ἡρώνα ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγήν. ταυτὸν δὲ εἰπεῖν, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου, καὶ ποιοῦντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἡ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο. ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων, ἢ ἐπιμερῶν, οὐκ ἔτι τὴν πηλικότητα δυνατὸν λαμβάνεσθαι, ἀδιαιρέτου μενούσης τῆς μονάδος. ὥς τ' ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα, εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ, ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυγχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος, ἢ τὰ μέρη, ἀφ' ὧν ὠνόμασαι ὁ λόγος· ὥς τε εἶναι, ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν, τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος· τοῦ δὲ ἐπιτρίτου, πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον. ὥς τε, καθὰ καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου, ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον πολλαπλασιαζομένην, ποιεῖν τὸν ἡγούμενον. τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἓξ, ἡμιολίου πηλικότης, οὗ ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ, πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ϛʹ, ποιεῖ τὸν θʹ. καὶ ἐπὶ τῶν

ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεςι κατανοεῖν. τούτων δὴ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. Ἔςωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β. μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ Γ. δεικτέον δὴ, ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν ΑΓ λόγου πηλικότης ὁ Δ· τοῦ δὲ ΓΒ ὁ Ε. ὁ ἄρα Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ Ζ πηλικότης ἐςὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου, τουτέςιν, ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ γὰρ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Β τὸν μὲν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ· ἔςιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἔςιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. ἐναλλὰξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Α. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς



& in aliis quoque idem perspicere licet. His ita prius explicatis, ad id quod propositum fuit, redeundum. Sint dati duo numeri, A,B. quorum medius sumtus sit aliquis C. Monstrandum est, rationem ipsius A ad B, conjunctam esse ex ea quam habet A ad C, & C ad B. Sumatur enim rationis AC quantitas, D; & rationis CB quantitas, E. Itaque E ipsum D multiplicans, faciat F. Dico ipsum F quantitatem esse rationis A ad B; hoc est, ipsum F, si B multiplicet, facere A. Nam B ipsum F multiplicans, faciat G. Quoniam itaque B ipsum F multiplicans fecit G; at ipsum E multiplicans, fecit C: est igitur, ut F ad E, sic G ad C. Rursus, quia D ipsum E multiplicans fecit F; at ipsum C multiplicans fecit A; est igitur, ut E ad C, sic F ad A. Permutando, ut E ad F, sic C ad A. & revertendo, ut F ad E, sic A

ad C. Sed ut F ad E, sic ostensus est G ad C: ergo &, ut G ad C, sic A ad C. quare A ipsi G æqualis est. At B ipsum F multiplicans fecit G. igitur & B ipsum F multiplicans facit A. quare F quantitas est rationis A ad B. Factus autem est F, ipso D in E multiplicato, hoc est, quantitate rationis A C, in quantitatem rationis C B. Itaque ratio ipsius A ad B composita est, & ex ea quam habet A ad C, & C ad B. quod monstrare oportebat.

Sed ut in exemplo quoque quod diximus clarum fiat, incidat inter XII & II medius aliquis numerus IV. Dico ipsius XII ad II rationem, nempe sextuplam, componi tum ex tripla, ipsius XII ad IV; tum ex dupla, ipsius IV ad II. Si enim quantitates harum rationum in se invicem multiplicemus, id est, III in II, fit VI, qui est quantitas rationis XII ad II. estque sextupla; quam & demonstrare erat propositum. Quod si vero medius incidens non sit majore minor, & minore major, sed vicissim, aut utrisque major, aut utrisque minor; etiam sic prædicta compositio sequetur. Inter IX & VI medius aliquis incidat utroque

τὸν Γ. ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ἐδείχθη ὁ Η πρὸς τὸν Γ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ἴσος ἄρα ὁ Α τῷ Η. ἀλλ' ὁ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν. καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ Ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου. καὶ ἔστιν ὁ Ζ, τοῦ Δ ἐπὶ τὸν Ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι, τῆς πηλικότητος τοῦ ΑΓ λόγου, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ΓΒ λόγου. ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερὸν γένηται τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ΄ καὶ τοῦ β΄ μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ΄. λέγω ὅτι ὁ τοῦ ιβ΄ πρὸς τὸν β΄ λόγος, τουτέστιν, ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου, τοῦ ιβ΄ πρὸς τὸν δ΄, καὶ τοῦ διπλασίου, τοῦ δ΄ πρὸς τὸν β΄. ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι, τὸν γ΄ ἐπὶ τὸν β΄, γίνεται ὁ ς΄, πηλικότης ὢν τοῦ τοῦ ιβ΄ πρὸς τὸν β΄ λόγου. καὶ ἔστιν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδεῖξαι. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχῃ τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν, ἢ ἀμφοτέρων μείζων, ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων· καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις ἡ

προειρημένῃ ἀκολουθήσει. Τοῦ θ' καὶ τοῦ ϛ' μέσος τὶς παρεμπιπτέτω, ἀμφοτέρων μείζων, ὁ ιβ'. λέγω ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου, τοῦ θ' πρὸς τὸν ιβ', λόγου, καὶ τοῦ διπλασίου, τοῦ ιβ' πρὸς τὸν ϛ', σύγκειται ὁ ἡμιόλιος, τοῦ θ' πρὸς τὸν ϛ'. ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ' πρὸς τὸν ιβ' λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν, ἥμισυ καὶ τέταρτον· ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ' πρὸς τὸν ϛ', ἐστὶν ὁ β'. ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β' ἐπὶ τὸ ἥμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς μία καὶ ἥμισυ, ἥτις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ' πρὸς τὸν ϛ'. Ὁμοίως δὲ κἂν τοῦ θ' καὶ τοῦ ϛ' μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ'· ἐκ τοῦ θ' πρὸς δ', διπλασιεπιτετάρτου, καὶ τοῦ δ' πρὸς ϛ', ὑφημιολίου, σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος. πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου, τὰ δύο τέταρτα, ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι, τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες, ἕξομεν τὸ ἓν ἥμισυ, πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου, ὡς εἴρηται, λόγου. καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἁρμόσει λόγος.

major, nempe XII. Dico, tum ex subsupertertia ratione ipsius IX ad XII; tum ex dupla, ipsius XII ad VI, compositam esse sesquialteram, ipsius IX ad VI. quippe rationis, ipsius IX ad XII, quantitas sunt tres partes quartæ, hoc est, semis & quartum: at quantitas ipsius XII ad VI est II. Si igitur ipsum II multiplicemus per dimidium & quartum, fit unitas una & dimidium, quæ quantitas est sesquialteræ rationis, quam & IX habet ad VI. Similiter etiam si inter IX & VI medius incidat IV; ex ipsius IX ad IV ratione duplasuperquarta, & IV ad VI subsesquialtera, composita est ratio sesquialtera. Rursus enim, si quantitatem duplasuperquartæ, nempe duo & quartum, per quantitatem subsesquialteræ, hoc est, duas tertias, multiplicaverimus, habebimus unum semis, sesquialteræ rationis, ut dictum est, quantitatem. Atque omnibus casibus simili modo eadem demonstratio congruet.

Συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς, ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεγεθῶν, κἂν μὴ εἷς μέσος, πλείους δὲ παρεμπίπτωσιν ὅροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων,

Ex dictis autem perspicuum est, si inter datos duos numeros, aut magnitudines, non unus medius, sed plures termini incidant, extremorum rationem componi ex omnibus ra-

tionibus, quas deinceps positi termini habent; incipientes à primo, & in ultimum desinentes, se proxime consequentium ordine. Inter duos enim terminos A, B incidant plures uno, C, D. Dico ipsius A ad B rationem compositam esse, & ex ea quam habet A ad C, & C ad D, & D ad B. Quoniam enim ipsius A ad B ratio composita est, tum ex ea quam habet A ad D, tum D ad B, ut superius est dictum; at ipsius A ad D ratio composita est & ex ea quam habet A ad C, & C ad D: Igitur ipsius A ad B ratio conjuncta est & ex ea quam habet A ad C, & C ad D, & D ad B. Similiter & reliquis casibus demonstrationem adcommodabimus.



ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἑξῆς κείμενοι ὅροι, ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου, καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον, τῇ κατὰ τοὺς ἐχομένους τάξει. δύο γὰρ ὅρων τῶν Α, Β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ Γ, Δ. λέγω ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται· ὁ δὲ τοῦ Α πρὸς τὸν Δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται.

INCERTI AUCTORIS Scholium in V definitionem lib. VI Euclidis.

Ratio ex rationibus composita dicitur, cum quantitates aliquarum rationum multiplicatæ fecerint rationem.] Ratio ex iis rationibus composita dicitur, quarum quantita-

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ϛʹ ἈΔΗΛΟΥ.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον.] Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται,

ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ' ὧν ὀνομάζονται· ὡς ἀπὸ τοῦ δύο, ὁ διπλάσιος. ἔστω λόγος, τοῦ ὀκτὼ πρὸς τὸν δ', διπλασίων· καὶ αὖ τοῦ δ' πρὸς τὸν β', διπλασίων καὶ αὐτός. ὁ τετραπλάσιος οὖν λόγος τοῦ η' πρὸς τὸν β', συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η' πρὸς τὸν δ', καὶ τοῦ δ' πρὸς τὸν β', ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. ἐπεί, ὡς εἴρηται, πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ' ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται· οἷον ἀπὸ τοῦ δύο, καὶ τρία, καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος· ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός· ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς· λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ' ἧς ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς λέγεται, ὃν λεπτῶν πρώτων λ'. λαμβάνω καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ' ἧς πάλιν ὁ δ' ἥμισυς λέγεται τοῦ η', καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ' πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ' πρῶτα καὶ αὐτὰ λεπτά, καὶ γίνονται δεύτερα λεπτά, ἐννεακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω, ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτά. ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτά, τέταρτόν ἐστι μονάδος. τετράκις γὰρ ιε', ξ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β' καὶ η',

tes ipsam faciunt. Quantitates autem dicit, à quibus rationes denominantur: ut à binario, dupla. Sit ratio dupla, octonarii ad IV; & rursus IV ad II, & ipsa dupla. Itaque ratio quadrupla, VIII ad II, composita dicitur ex duabus illis rationibus, tum VIII ad IV, tum IV ad II, quoniam quantitates illarum eam faciunt hoc modo. Quandoquidem, ut dictum est, quantitates ii numeri dicuntur, à quibus relationes nominantur; ut à binario, & ternario, & quaternario, dupla ratio, & tripla, & quadrupla: præterea dimidium quoque ab unitate denominatur, & binarius quaternarii est dimidius: ideo dimidium sumo unitatis, à qua binarius quaternarii dimidius dicitur, existens primorum minutorum XXX. Deinde aliud sumo unitatis dimidium, à qua rursus quaternarius dicitur dimidius octonarii; & multiplico XXX prima minuta in XXX, & ipsa prima minuta; & fiunt nongenta, minuta secunda. Hæc reduco, seu divido, & fiunt quindecim prima minuta: quæ quindecim prima minuta sunt quadrans unitatis. quippe quater quindena sunt LX. Verum sit medius inter II & VIII,

numerus XL. quoniam igitur binarius eſt quadragenarii pars vigeſima, ſumo vigeſimam partem unitatis, quæ eſt trium minutorum. Rurſus quia XL eſt quintupla ipſius VIII, pars quadragenarii dicitur octonarius. Multiplico ternarium, partem vicelimam ipſius LX, per V, à quo VIII dicitur pars quinta ipſius XL. & fiunt minuta XV: quæ ſunt unitatis quadrans. Et ſic rurſus binarius eſt pars quarta octonarii. Sit jam inter IV & XII poſitus numerus VIII. Quoniam igitur IV dimidius eſt VIII; at VIII ſubſeſquialter ipſius XII, ſumo minuta XXX, unitatis ſemiſſem; & rurſus minuta XL, numerum unitatis ſubſeſquialterum; & multiplico XXX per XL, fiuntque mille ducenta, ſecunda minuta. Hæc reduco, & fiunt minuta prima XX. quæ ſunt triens unitatis. ut & IV eſt triens ipſius XII. Sit inter II & XII poſitus IV. Et quia binarius quaternarii eſt dimidius, at IV ſubtriplus ipſius XII; ſumo XXX minuta, unitatis dimidium; & XX, illius trientem: quippe à ternario tripla ratio eſt denominata: & multiplico XXX per XX, fiunt ſexcenta, ſecunda minuta. quæ reducta fiunt

ὁ μ′. καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ′ εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος, ὃν λεπτῶν τριῶν. ἐπεὶ πάλιν ὁ μ′ πενταπλάσιός ἐστι τοῦ η′, μέρος τοῦ μ′ ὁ η′ λέγεται. πολλαπλασιάζω τὸν τρία, τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξ′, παρὰ τὸν ε′, ἀφ᾽ οὗ πέμπτον μέρος ὁ η′ τοῦ μ′ λέγεται, καὶ γίνονται ιε′ λεπτὰ, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β′ τοῦ η′ τέταρτόν ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ′ καὶ ιβ′ ὁ η′. ἐπεὶ ὁ δ′ ἥμισύς ἐστι τοῦ η′, ὁ δὲ η′ ὑφημιόλιος τοῦ ιβ′, λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ′, τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ πάλιν τὰ μ′ λεπτὰ, τὸν ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ′ παρὰ τὰ μ′, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτά. ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ′. τὰ κ′ τρίτον ἐστὶ μονάδος. καὶ ὁ δ′ οὖν τρίτον ἐστὶ τοῦ ιβ′. Ἔστω μεταξὺ τοῦ β′ καὶ τοῦ ιβ′ ὁ δ′. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ δ′ ἥμισύς ἐστιν, ὁ δὲ δ′ τοῦ ιβ′ ὑποτριπλάσιος· λαμβάνω τὰ λ′ λεπτὰ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ· καὶ τὰ κ′, τὸ τρίτον αὐτῆς. ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. καὶ ποιῶ τὰ λ′ ἐπὶ τὰ κ′, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται

δέκα πρῶτα. τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος. καὶ ὁ β′ ἕκτον τοῦ ιβ′. Πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ′ καὶ ε′, ὁ κ′. καὶ ἐπεὶ ὁ δ′ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ′, ὁ δὲ κ′ τετραπλάσιος τοῦ ε′. λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον, τὰ ιβ′. καὶ τὸν δ′, ἀφ’ οὗ ὁ ε′ τέταρτον λέγεται τοῦ κ′, καὶ ποιῶ τὰ τέσσαρα παρὰ τὰ δώδεκα, γίνονται μη′, ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ′ τοῦ ε′ ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β′ καὶ δ′, ὁ γ′. καὶ ἐπεὶ ὁ δ′ τοῦ γ′ ἐπίτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν, καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ὅ ἐστι μονάς· λαμβάνω τὴν μονάδα, ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ′. ἀφ’ ἧς μονάδος τρίτον ὄντος τοῦ τρία, ὁ δ′ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ′, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸ τὸν τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β′. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεος. καὶ ποιῶ τὸν λ′ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ′ λεπτὰ, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνεται λ′ πρῶτα λεπτά. ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β′ τοῦ δ′ ἥμισύς ἐστιν.

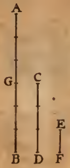
Λόγος ἐκ δύο λόγων, ἢ καὶ πλειόνων, συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες

decem prima. Hæc decem sunt sextans unitatis. ut & II est sexta pars XII. Rursus esto inter IV & V positus numerus XX. Quoniam igitur IV est subquintuplus ipsius XX; at XX quadruplus ipsius V; sumo unitatis partem quintam, XII; & IV, à quo quinarius quarta pars dicitur vicenarii; & multiplico IV per XII. fiunt IIL, qui numerus est subsuperquartus unitatis. quomodo & IV subsuperquartus est ipsius V. Sit iterum inter II & IV medius III. Et quoniam IV ipsius III supertertius est; quia eum continet, & ejus trientem, qui est unitas; sumo unitatem, quæ est minutorum LX; cujus unitatis cum triens sit ternarius, ipse quaternarius ejus supertertius dicitur. Sumo quoque XXX, unitatis dimidium, quod III sit sesquialter ipsius II. denominatur enim sesquialterum à semisse. Jam multiplico XXX per unitatem, seu LX minuta, & fiunt mille octingenta, minuta secunda. Hæc reduco, & fiunt XXX, minuta prima; quæ sunt unitatis dimidium: quomodo & II ipsius IV est dimidius.

Ratio ex duabus rationibus, vel etiam pluribus, composita dicitur, cum rationum

quantitates multiplicatæ fecerint aliquam rationis quantitatem.

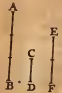
Habeat enim AB ad CD rationem datam; ut, duplam, aut triplam, aut aliam quandam; & CD quoque ad EF datam habeat rationem: Dico rationem ipsius AB ad EF compositam esse ex ratione AB ad CD, & ratione CD ad EF. seu, si rationis AB ad CD quantitas multiplicetur per rationis CD ad EF quantitatem, inde fieri quantitatem rationis AB ad EF. Si enim primum AB major ipsâ CD, & CD major ipsâ EF; sitque AB ipsius CD dupla; CD autem ipsius EF tripla. Quoniam igitur CD ipsius EF tripla est, at ipsius CD dupla AB; igitur AB ipsius EF est sextupla. quoniam, si triplum alicujus duplicaverimus, fiet ipsius sextuplum. Hoc enim proprie est compositio. Vel hoc modo: Quoniam AB ipsius CD est dupla, dividatur AB in partes ipsi CD æquales, quæ sint AG, GB. & quoniam CD ipsius EF est tripla, at



πολυπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.

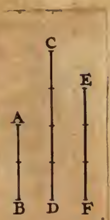
Ἐχέτω γὰρ τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον· οἷον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ EZ, καὶ αὐτὸ δεδομένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ AB πρὸς τὸ EZ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EZ. ἤτοι ὅτι, ἐὰν ἡ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EZ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ AB πρὸς EZ. Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν AB τοῦ ΓΔ μεῖζον, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ EZ. καὶ ἔστω τὸ μὲν AB τοῦ ΓΔ διπλάσιον· τὸ δὲ ΓΔ τοῦ EZ τριπλάσιον· ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ EZ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΓΔ διπλάσιον τὸ AB· τὸ ἄρα AB τοῦ EZ ἐστὶ ἑξαπλάσιον· ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον· τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ AB εἰς τὰ τῷ ΓΔ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ EZ ἐστὶ τριπλάσιον· ἴσον δὲ τὸ

ΑΗ τῷ ΓΔ. καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τοῦ ΕΖ ἐστὶ τριπλάσιον. ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ λόγου· ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΓΔ ἑκατέρων τῶν ΑΒ, ΕΖ, τὸ αὐτὸ συναχθήσεται. Ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ τριπλάσιον· τὸ δὲ ΓΔ ἥμισυ τοῦ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΖ, τοῦ δὲ ΓΔ τριπλάσιον τὸ ΑΒ· τὸ ΑΒ ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ ΕΖ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. ἢ καὶ οὕτως· ἐπεὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ ΑΒ ἴσων τῷ ΓΔ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ ΕΖ δύο. ὥστε ἡμιόλιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΕΖ. ὁ ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς ΕΖ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν, ἔστω τὸ ΓΔ ἑκατέρου τῶν ΑΒ, ΕΖ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ ἥμισυ μέρος· τὸ δὲ ΓΔ



AG ipsi CD æqualis; erit igitur AG ipsius quoque EF tripla. ideoque tota AB ipsius EF est sextupla. Quare ratio ipsius AB ad ipsam EF conjuncta est per medium terminum CD, composita ex ratione AB ad CD, & ratione CD ad EF. Similiter autem, si quoque CD utrâvis ipsarum AB, EF, minor sit, idem conficietur. Sit enim rursus AB ipsius CD tripla; at CD ipsius EF dimidia. Quoniam igitur CD dimidia est ipsius EF, at ipsius CD tripla AB; erit ergo AB ipsius EF sesquialtera. Si enim dimidium alicujus triplicaverimus, habebimus ipsum semel, & dimidium. Vel etiam hoc modo. Quoniam AB ipsius CD est tripla, at CD ipsius EF dimidia, qualium partium, ipsi CD æqualium, AB est trium, talium est EF duarum. ut AB sesquialtera sit ipsius EF. Itaque ratio AB ad EF conjuncta est per CD medium terminum, composita tum ex ratione AB ad CD, tum ex ratione CD ad EF. Sed rursus, sit CD utrâvis ipsarum AB, EF, major: & sit AB ipsius CD dimidia, at CD

ſupertertia ipſius EF. Quoniam igitur, qualium partium eſt AB duarum, talium CD eſt quatuor; qualium autem CD eſt quatuor, talium EF eſt trium: igitur etiam qualium AB eſt duarum, talium EF eſt trium. Itaque rurſus conjuncta eſt ratio ipſius AB ad EF per medium terminum CD: quæ ratio eſt binarii ad ternarium. Similiter & in reliquis caſibus, pluribus mediis terminis interpoſitis, demonſtratio adplicabitur. Sed & hoc liquet, ſi à compoſita ratione quævis componentium auferatur, una ex ſimplicibus evaneſcente, reliquas componentium relictum iri.



τοῦ ΕΖ ἐπίτριτον· ἐπεὶ οὖν οἵων ἐστὶ τὸ ΑΒ δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ ΓΔ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ ΓΔ τεσσάρων, τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν. καὶ οἵων ἄρα τὸ ΑΒ δύο, τοιούτων τὸ ΕΖ τριῶν. συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ λόγος διὰ τοῦ ΓΔ μέσου ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.

Sequuntur quædam Euclidis definitiones cum ſcholiis; ut & alia, quæ ad ſequentium explicationem requiruntur.

In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplices, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, ſecundum quamcunque multiplicationem, utraque ab utrâque aut unà deficiunt; aut unà

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα

ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα καλάλληλα.

Ἐν τῷ αὐτῷ] Οὕτως ἄν τις διὰ ἀριθμῶν τὰ τῶν λόγων, πῶς ἔχουσι, σαφηνείας χάριν ἐκθείη. Ἔστωσαν ἀριθμοὶ τέσσαρες ἐφεξῆς, καὶ δέον ἔστω γνῶναι, ἤπερ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ὁ πρῶτος πρὸς δεύτερον, καὶ ὁ τρίτος πρὸς τέταρτον· ἢ μείζονα λόγον ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς δεύτερον, ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τέταρτον· ἢ ἐλάσσονα. πολλαπλασιασθήτωσαν ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος ἐπ' ἀλλήλους, ἵνα οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γένωνται ἴσοι. εἶτα πολλαπλασιασθήτωσαν ὁ μὲν πρῶτος ἐπὶ τὸν τέταρτον· ὁ δὲ δεύτερος ἐπὶ τὸν τρίτον. καὶ ἐὰν ὦσιν οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἴσοι, φήσομεν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· εἰ δὲ μείζων ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου, τοῦ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου, μείζονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον· εἰ δὲ ἐλάσσων ὁ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πρώτου, τοῦ ἐκ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δευτέρου, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον.

æquales ſunt; aut unà ſuperant, ordine ſumtæ.

In eadem] Quomodo rationes inter ſe ſint comparatæ, numeris, majoris evidentiæ gratia, ita quis exponat. Sint numeri quatuor deinceps, & ſcire oporteat, num in eadem ratione ſint primus ad ſecundum, & tertius ad quartum: aut etiam majorem rationem habeat primus ad ſecundum quam tertius ad quartum: aut minorem. Multiplicentur inter ſe invicem tertius & quartus, ut ex multiplicatione prodeuntes fiant æquales. Deinde multiplicentur primus in quartum; & ſecundus in tertium. Jam ſi ex multiplicatione primi & ſecundi prodeuntes æquales fuerint, in eadem ratione eſſe dicemus primum ad ſecundum, in qua tertius ad quartum. Quod ſi major fuerit is, qui ex primi multiplicatione prodit, illo qui ex multiplicatione ſecundi; majorem rationem habere dicemus primum ad ſecundum quàm tertius habeat ad quartum. Sin minor fuerit is, qui ex primi multiplicatione prodit, illo qui ex multiplicatione ſecundi; minorem rationem habere primum ad ſecundum quàm tertius habeat ad quartum.

Exemplum, cum in eadem ratione sunt, erunt hi numeri: XII. VI. VIII. IV. Multiplicentur inter se mutuo, VIII in IV, fiunt XXXII; IV in VIII, fiunt rursus XXXII. Similiter multiplicentur, XII in IV, fiunt IIL; & VI in VIII, fiunt itidem XXXXVIII. Unde manifestum, in eadem ratione esse XII ad VI, & VIII ad IV. At cum majorem rationem habet primus ad secundum quàm tertius ad quartum, exemplo erunt hi numeri: X. IV. VI. III. Multiplicentur invicem, VI in III, fiunt XVIII; & III in VI, fiunt itidem XIIX. Deinde X in III, fiunt XXX; & IV in VI, fiunt XXIV. Hinc rursus manifestum, majorem rationem habere X ad IV quàm VI habeat ad III. Porro, si minorem habeat rationem primus ad secundum quàm tertius ad quartum, exemplum habebimus in his numeris: XII. VII. XVIII. IX. Multiplicato XIIX in IX, fiunt CLXII; & IX in XIIX, rursus CLXII. Deinde XII in IX, fiunt CIIX; & VII in XVIII, fiunt CXXVI. Et hinc perspicuum, primum ad secundum minorem rationem habere quam tertius habeat ad quartum.

ὑποδείγματα τοῦ μὲν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται ἀριθμοὶ οὗτοι· ιβ΄. ϛ΄. η΄. δ΄. πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους, ὁ μὲν η΄ ἐπὶ τὸν δ΄, γίνονται λβ΄· ὁ δὲ δ΄ ἐπὶ τὸν η΄, γίνονται πάλιν λβ΄. ὁμοίως πολλαπλασιασθήσωσαν ὁ μὲν ιβ΄ ἐπὶ τὸν δ΄, γίνονται μη΄· ὁ δὲ ϛ΄ ἐπὶ τὸν η΄, γίνονται μη΄. καὶ φανερὸν, ὅτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ὅ, τε ιβ΄ πρὸς τὸν ϛ΄, καὶ ὁ η΄ πρὸς τὸν δ΄. τοῦ δὲ μείζονα λόγον ἔχειν τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον, ἀριθμοὶ οὗτοι· ι΄. δ΄. ϛ΄. γ΄. πολλαπλασιασθήτωσαν ἐπ' ἀλλήλους ὁ μὲν ϛ΄ ἐπὶ τὸν γ΄, γίνονται ιη΄· καὶ ὁ γ΄ ἐπὶ τὸν ϛ΄, γίνονται ὁμοίως ιη΄. εἶτα ὁ ι΄ ἐπὶ τὸν γ΄, γίνονται λ΄· ὁ δὲ δ΄ ἐπὶ τὸν ϛ΄, γίνονται κδ΄. καὶ πάλιν φανερὸν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει ὁ ι΄ πρὸς τὸν δ΄ ἤπερ ὁ ϛ΄ πρὸς τὸν γ΄. τοῦ δὲ ἐλάσσονα ἔχειν λόγον τὸν πρῶτον πρὸς τὸν δεύτερον ἤπερ τὸν τρίτον πρὸς τὸν τέταρτον, ἀριθμοὶ οὗτοι· ιβ΄. ζ΄. ιη΄. θ΄. ὁ ιη΄ ἐπὶ τὸν θ΄, γίνονται ρξβ΄· καὶ ὁ θ΄ ἐπὶ τὸν ιη΄, πάλιν ρξβ΄. εἶτα ὁ ιβ΄ ἐπὶ τὸν θ΄, γίνονται ρη΄· καὶ ὁ ζ΄ ἐπὶ τὸν ιη΄, γίνονται ρκϛ΄. καὶ φανερὸν ὅτι ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον.

Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου· τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

Cum magnitudinum æque multiplicium, multiplex primæ superat multiplicem secundæ; at tertiæ multiplex non superat multiplicem quartæ; tum prima ad secundam majorem rationem habere dicitur quàm tertia habet ad quartam.

Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.

Analogia est rationum similitudo. Analogia in tribus terminis minima est.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Cum tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam dicitur habere rationem duplam ejus quam habet ad secundam. Cum quatuor magnitudines proportionales sunt, prima ad quartam dicitur habere rationem triplam ejus quam habet ad secundam: & deinceps semper unam amplius rationem, quousque proportio fuerit.

Σχόλιον.

Scholium.

Ὅταν δὲ τρία μεγέθη] Οὐ λέγει, ὅτι δύο λόγοι τοῦ ἑνὸς διπλάσιοι εἰσί· καὶ τοῦτο μὲν γάρ· ἀλλ' ὅτι ὁ λόγος, ὁ ἐκ τῶν δύο, διπλάσιός ἐστιν· ὡς

Cum tres magnitudines] Non dicit, duas rationes unius esse duplas; quod etiam verum: sed rationem, ex binis constantem, esse duplam; ut,

VIII. IV. II. aut, IX. III. I. Etenim in primis duæ sunt duplæ rationes continuæ; seu, quam habet VIII ad IV, & IV ad II. Sed VIII ad II, seu, primus ad tertium, non habet rationem duplam ejus quam habet ad II, id est, secundum, sed bis duplam; seu, quam habet primus ad secundum, & quam habet secundus ad tertium. Similiter & in triplis, IX. III. I. duæ sunt triplæ rationes continuæ. Habet enim IX ad III, rationem triplam; & III ad unitatem itidem rationem triplam: Sed novenarius ad unitatem bis habere dicitur eam rationem, quam habet ad ternarium. quippe inter IX & I duæ sunt rationes triplæ. Similiter in cæteris. Atque ita se res habet, si tres sint magnitudines proportionales; at si quatuor, prima ad quartam habet rationem triplam ejus quam habet ad secundam. Inter quatuor enim numeros, in eadem ratione positos, tres sunt eædem rationes. Ideoque primus ad quartum dicitur habere ter eam rationem quam habet ad secundum, id est, triplam.

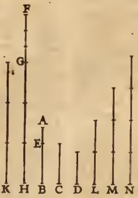
ή. δ'. β'. ἢ, θ'. γ'. α'. καὶ γὰρ ἐν μὲν τοῖς πρώτοις, δύο μὲν διπλάσιοι λόγοι εἰσὶ συνεχεῖς ἤτοι, ὃν ἔχει ὁ ή πρὸς τὸν δ', καὶ ὁ δ' πρὸς τὸν β'. ἀλλ' ὁ ή πρὸς τὸν β', ἤτοι, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τρίτον, οὐκ ἔχει λόγον διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει πρὸς τὸν β', τουτέστι, τὸν δεύτερον, ἀλλὰ δὶς τὸν διπλάσιον. ἤτοι, ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, καὶ ὃν ἔχει ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν τριπλασίων, τοῦ θ'. γ'. α'. ἔχει μὲν γὰρ ὁ θ' πρὸς τὸν γ', λόγον τριπλασίονα· καὶ ὁ γ' πρὸς τὴν μονάδα, λόγον ὡσαύτως τριπλάσιον. ἀλλ' ὁ θ' πρὸς τὴν μονάδα δὶς λέγεται ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει πρὸς τὸν γ'. μεταξὺ γὰρ τοῦ θ'. α'. δύο λόγοι εἰσὶ τριπλάσιοι. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. καὶ οὕτω μὲν ἐὰν τρία ἐστὶ τὰ ἀνάλογον μεγέθη. ἐὰν δὲ τέσσαρα, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον. μεταξὺ γὰρ τεσσάρων ἀριθμῶν, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ κειμένων, τρεῖς οἱ αὐτοὶ λόγοι εἰσί. καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον ἔχειν τρὶς τὸν λόγον ὃν ἔχει πρὸς τὸν δεύτερον, τουτέστι, τριπλάσιον.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIB. V.

PROPOSITIO VIII.

ΤΩΝ ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον, πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ, πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη, τὰ AB, Γ. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ AB τοῦ Γ. ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ. λέγω ὅτι τὸ AB πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ AB. ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ BE. τὸ δὴ ἔλασσον τῶν AE, EB, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB. καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, ἕως οὗ τὸ γινόμενον μεῖζον γένηται τοῦ Δ. καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ZH, μεῖζον ὂν τοῦ Δ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ZH τοῦ AE, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν HΘ



INæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor: & eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem.

Sint inæquales magnitudines, AB, C: & sit AB major quàm C. alia autem quæcunque, D. Dico AB ad D majorem rationem habere quàm C ad D: & D ad C majorem rationem habere quàm ad AB. Quoniam enim major est AB quàm C, ponatur ipsi C æqualis BE. Jam verò si minor ipsarū AE, EB multiplicetur, illa major aliquando erit quàm D. Sit primùm AE minor quàm EB. & multiplicetur AE, donec quæ inde producitur magnitudo major sit quàm D. sitque ipsius multipla FG, major quàm D. Et quotupla est FG ipsius AE, totupla fiat & GH

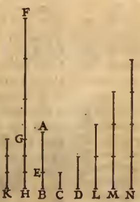
ipsius EB, & K ipsius C. sumaturque ipsius D dupla, L; & tripla M; & deinceps unitate superantes, donec quæ sumitur, multipla quidem fiat ipsius D, primo autem major quàm K. Sumatur, & sit N, quadrupla ipsius D, primo autem major quàm K. Quoniam igitur K primo minor est quàm N, idcirco K non est minor quàm M. Et quoniam æque multipla est FG ipsius AE, & GH ipsius EB, igitur æque multipla est FG ipsius AE, & FH ipsius AB. Æque autem multipla est FG ipsius AE, & K ipsius C. Quare æque multipla est FH ipsius AB, & K ipsius C. Ergo magnitudines FH, K, ipsarum AB, C æque sunt multiplæ. Rursus quoniam æque multipla est GH ipsius EB, & K ipsius C; æqualis autem EB ipsi C; igitur & GH æqualis est ipsi K. at K non est minor quàm M. neque ergo GH minor est quàm M. Porro FG major est quàm D. Tota igitur FH ambabus, D, M, major est. Sed ambæ, D, M, ipsi N sunt æquales, quandoquidem M ipsius D est tripla; ambæ autem, M, D, ipsius D sunt quadruplæ. Est vero etiam N ipsius C quadrupla. Quare

τῦ ΕΒ, καὶ τὸ Κ τῦ Γ. καὶ εἰλήφθω τῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ· καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον, πολλαπλάσιον μὲν γένηται τῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τῦ Κ. εἰλήφθω καὶ ἔσω τὸ Ν, τετραπλάσιον μὲν τῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τῦ Κ. ἐπεὶ ὖν τὸ Κ τῦ Ν πρώτως ἐςὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τῦ Μ ὐκ ἔςιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τῦ ΑΕ, καὶ τὸ ΗΘ τῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τῦ ΑΕ, καὶ τὸ ΖΘ τῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐςι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τῦ ΑΕ, καὶ τὸ Κ τῦ Γ. ἰσάκις ἄρα ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τῦ Γ. τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσια. πάλιν ἐπεὶ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τῦ ΕΒ, καὶ τὸ Κ τῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τῦ Μ ὐκ ἔςιν ἔλαττον. ὐδ᾽ ἄρα τὸ ΗΘ τῦ Μ ἔλαττον ἐςί. μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τῦ Δ. ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων, τῶν Δ, Μ, μεῖζον ἐςίν. ἀλλὰ συναμφότερα, τὰ Δ, Μ, τῷ Ν ἐςὶν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ Μ τῦ Δ τριπλάσιον ἐςί· συναμφότερα δὲ, τὰ Μ, Δ, τῦ Δ ἐςὶ τετραπλάσια. ἔςι δὲ καὶ τὸ Ν τῦ Δ τετραπλάσιον. συναμφότερα

ἄρα, τὰ Μ, Δ, τῷ Ν ἴσα ἐστίν· ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Μ, Δ μεῖζον ἐστίν. τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ, τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον. τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τὸ δὲ Ν τοῦ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον· τὰ δὲ ΖΘ, Κ, τῶν Α.Β, Γ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ μεῖζον ἔστω τοῦ ΕΒ. τὸ δὴ ἔλαττον, τὸ ΕΒ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ, πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγο-

ambæ, M, D, ipſi N ſunt æquales. Sed F H ipſis M, D, major eſt. igitur F H ſuperat ipſam N; at K non ſuperat ipſam N. Suntque F H, K, ipſarum A B, C æque multiplæ; & N alia quædam multipla. Ergo AB ad D majorem rationem habet quàm C ad D. Dico porro, D ad C majorem rationem habere quàm D ad A B. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter monſtrabimus, quod N ſuperet ipſam K; at N non ſuperet ipſam FH. Eſtque N ipſius D multipla, & F H, K, ipſarum A B, C, aliæ quædam æque multiplæ. Quare D ad C majorem rationem habet quam D ad A B.



Cæterum ſit AE major quàm E B. Minor autem EB, ſi multiplicetur, major aliquando erit quàm D. Multiplicetur, ſitque G H, multipla ipſius E B, & major quàm D. Et quotupla eſt G H ipſius E B, totu-

pla fiat & FG ipſius AE, & K ipſius C. Jam ſimiliter monſtrabimus, magnitudines FH, K, ipſarum AB, C æque eſſe multiplas. Sumaturque ſimiliter N, multipla ipſius D, primo autem major ipſâ FG. Itaque rurſus FG non eſt minor quàm M: major autem GH quàm D. Tota ergo FH ipſas D, M, hoc eſt, N, ſuperat. at K ipſam N non ſuperat; quoniam & FG, major exiſtens quam GH, id eſt, K, ipſam N non ſuperat. Et ſimili modo, ſuperiora ſequentes, demonſtrationem perficimus. Quare Inæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor: & eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem. Quod monſtrare oportebat.

νέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τȣ̃ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τȣ̃ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ, τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσια. καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν, πολλαπλάσιον μὲν τȣ̃ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τȣ̃ ΖΗ. ὥς τε πάλιν τὸ ΖΗ τȣ̃ Μ ȣ̓κ ἔςιν ἔλαττον· μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τȣ̃ Δ. ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τȣτέςι, τȣ̃ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τȣ̃ Ν ȣ̓χ ὑπερέχει. ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ, μεῖζον ὂν τȣ̃ ΗΘ, τȣτέςι, τȣ̃ Κ, τȣ̃ Ν ȣ̓χ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολȣθȣ̃ντες τοῖς ἐπάνω, περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quod huic propoſitioni ſcholium Commandinus adtexuit, non ipſius, ſed antiquum videtur. Suis enim nomen proprium addit. Et pro iis verbis, *per eam diffinitionem, quæ dicit*, ſimpliciter poſuiſſet, *per diffinitionem ſeptimam.*

SCHOLIUM.

Ergo AB ad D majorem proportionem habet, quàm C ad D.] Quattuor ſunt magnitudines, prima quidem AB, ſecunda D, tertia autem C, & quarta D. bis enim ſumitur D, & ut ſecunda, & ut quarta. atque eſt primæ quidem AB multiplex FH;

secundæ verò D, multiplex N; & tertiæ C multiplex K. est igitur F H major quàm N; quæ quidem N multiplex est secundæ D; K verò, multiplex tertiæ C, minor est quàm N, quæ est multiplex quartæ D. Itaque quoniam multiplex primæ major est multiplici secundæ; multiplex autem tertiæ non major multiplici quartæ; habebit AB ad D majorem proportionem quàm C ad eandem D, per eam diffinitionem, quæ dicit, Quando æque multiplicium multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex autem tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicetur quàm tertia ad quartam.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIB. V.

PROPOSITIO X.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστί· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐστίν.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β. ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β, πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἴσόν ἐστι τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ



Habeat enim A ad C majorem rationē quàm B ad C. Dico A majorem esse quàm B. Quod si non, aut æqualis est A ipsi B, aut minor. Æqualis autem non est A ipsi B. utraque enim ipsarum A, B, ad C eandem haberet rationem. atqui non habet. Ergo A ipsi B non est æqualis. Sed nec minor est A quàm B. quippe A ad C minorem rationem haberet quàm B ad C. at-

qui non habet. Quare A non est minor quam B. Monstrata autem est nec æqualis esse. Ergo A major est quàm B. Habeat rursus C ad B majorem rationem quàm C ad A. Dico B minorem esse quam A. Quod si non, aut æqualis est, aut major. Jam vero æqualis non est B ipsi A. quippe C ad utramque ipsarum A, B, eandem haberet rationem. atqui non habet. Ergo A ipsi B non est æqualis. Sed nec B major est quàm A. quippe C ad B minorem haberet rationem, quàm ad A. atqui non habet. Ergo B non est major quàm A. Monstrata autem est nec æqualis esse. Ergo B minor est quam A. Quare ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor est. quod monstrare oportebat.

ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α. λέγω ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσόν ἐστιν, ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α. τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἴσόν ἐστι τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον. ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον, μεῖζόν ἐστι· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ARCHIMEDIS DE SPHÆra & Cylindro libri I.

Propositio II.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est invenire duas rectas inæquales, quarum major ad minorem, minorem habeat rationem quàm major magnitudo ad minorem.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ σφαίρας καὶ κυλίνδρου βιβλίου Α΄ πρότασις Β΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥς τε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ A B, Δ. *καὶ ἔστω μεῖζον τὸ* A B. *λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ* Δ *ἴσον τὸ* B Γ. *καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ* Z H. *τὸ δὴ* A Γ *ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ* Δ. *πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ* A Θ. *καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ* Θ A *τοῦ* A Γ, *τοσαπλάσιος ἔστω ἡ* Z H *τῆς* H E. *ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ* Θ A *πρὸς* A Γ, *οὕτως ἡ* Z H *πρὸς* H E. *καὶ ἀνάπαλιν ἔστιν, ὡς ἡ* E H *πρὸς* H Z, *οὕτως τὸ* Γ A *πρὸς* A Θ. *καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ* A Θ *τοῦ* Δ, *τουτέστι, τοῦ* Γ B. *τὸ ἄρα* Γ A *πρὸς* A Θ *λόγον ἐλάσσονα ἔχει ἤπερ τὸ* A Γ *πρὸς* Γ B. *καὶ συνθέντι ἡ* E Z *ἄρα πρὸς* Z H *ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ* A B *πρὸς* B Γ. *ἴσον δὲ τὸ* B Γ *τῷ* Δ. *ἡ* E Z *ἄρα πρὸς* Z H *ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ* A B *πρὸς τὸ* Δ. *εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ ἐπίταγμα, τουτέστι, τὴν*



Sint duæ magnitudines inæquales, A B, D. ſitque major A B. Dico, poſſibile eſſe invenire duas rectas inæquales, quæ id, quod diximus, imperatum faciant. Ponatur, per ſecundam primi Elementorum Euclidis, ipſi D æqualis B C. Deinde ponatur recta quædam linea F G. Jam vero magnitudo A C ſibimet ſuperaddita ſuperabit aliquando ipſam D. Multiplicetur ergo, & ſit A H. & quàm multipla eſt magnitudo H A ipſius A C, tàm multipla ſit linea F G ipſius G E. Eſt igitur, ut H A ad A C, ita F G ad G E. & revertendo eſt, ut E G ad G F, ſic C A ad A H. Et quoniam magnitudo A H major eſt magnitudine D, hoc eſt C B; ideo C A ad A H rationem minorem habet quam A C ad C B. & componenti, recta ergo E F ad F G minorem rationem habet quàm magnitudo A B ad B C. At vero æqualis eſt B C ipſi D. quare E F ad F G minorem rationem habet quàm A B ad D. Itaque inventæ ſunt duæ rectæ inæquales, imperatum exhibentes; id eſt, majorem

ad minorem habere minorem rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.

EUTOCII COMMENTARIUS.

Jam verò magnitudo A C ſibimet ſuperaddita ſuperabit ipſam D.] Scilicet ipsâ AB aut ſuperparticulari, aut etiam ſuperperte, exiſtente ipſius D. Quod ſi A B aut multipla fuerit ipſius D, aut multiplaſuperparticularis, aut etiam multiplaſuperpers, ablatâ ab A B ipsâ B C, quæ æqualis ſit ipſi D, reliqua CA ſuperabit ipſam D. adeo ut nunquam ipſa CA multiplicanda ſit, ſed inde ipſi AC æqualem deſecare oporteat ipſam A H, eandemq; demonſtrationem adcommodare.

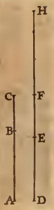
ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ.

Τὸ δὴ ΑΓ ἑαυτῷ ἐπισυντεθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ.] Δηλαδὴ ὡς τοῦ ΑΒ ἤτοι ἐπιμορίου, ἢ καὶ ἐπιμεροῦς, τυγχάνοντος τοῦ Δ. εἰ δὲ εἴη τὸ ΑΒ τοῦ Δ ἤτοι πολλαπλάσιον, ἢ πολλαπλασιεπιμόριον, ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερὲς, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ ΑΒ, ἴσου τῷ Δ τοῦ ΒΓ, τὸ λοιπὸν τὸ ΓΑ ὑπερέξει τοῦ Δ. ὥς τε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτὸ, ἀλλὰ αὐτόθεν δεῖν τῷ ΑΓ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ ΑΘ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἁρμόζειν.

Et componenti recta ergo E F ad F G minorem rationem habet quàm magnitudo AB ad BC.] Quod enim, ſi prima ad ſecundam minorem rationem habeat quam tertia ad quartam, etiam componenti eadem ratio ſequatur, ſic monſtrabitur. Sint quatuor magnitudines, AB. BC. DE. EF. & A B ad B C majorem rationem habeat quàm D E ad EF. Dico, etiam componenti AC ad CB majorem rationem habere quàm D F ad FE. Fiat

Καὶ συνθέντι ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ.] Ὅτι γὰρ, ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ, δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη, τὰ ΑΒ. ΒΓ. ΔΕ. ΕΖ. τὸ δὲ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ. λέγω ὅτι καὶ συνθέντι τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. γεγονέτω γὰρ, ὡς τὸ

ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ, οὕτως τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΖΘ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. καὶ τὸ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΕ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΖ τοῦ ΕΔ. καὶ ὅλον τὸ ΘΕ τοῦ ΔΖ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ. διὰ τὸ συνθέντι καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. λέγω ὅτι καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. πάλιν γὰρ ὁμοίως, ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΘ, καὶ τὸ ΕΘ μεῖζον τοῦ ΔΖ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΕΖ, ἔσται μεῖζον τὸ ΘΖ τοῦ ΔΕ. καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι, τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ, διὰ τὸ διελόντι, μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. φανερὸν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ συνθέντι,



enim, ut CB ad BA, sic EF ad FH. revertendo igitur, ut AB ad BC, sic HF ad FE. At majorem rationem habet AB ad BC quàm DE ad EF. Ergo & HF ad FE majorem rationem habet quàm DE ad EF. Major itaque est HF quàm ED. & tota HE quàm DF. & propterea HE ad EF majorem rationem habet quàm DF ad FE. Sed ut HE ad EF, ita AC ad CB, propter componenti. Ergo etiam AC ad CB majorem rationem habet quàm DF ad FE. At verò AC ad CB majorem rationem habeat quàm DF ad FE. Dico etiam dividenti AB ad BC majorem rationem habere quàm DE ad EF. Rursus enim simili modo, si faciamus, ut BC ad CA, sic FE ad EH, erit EH major quàm DF. & communi magnitudine EF ablatâ, erit HF major quàm DE. & propterea HF ad FE, hoc est, AB ad BC, propter dividenti, majorem rationem habebit quàm DE ad EF. Perspicuum autem est per similes argumentationes, etiamsi AB ad BC minorem rationem habeat quàm DE ad EF, & com-

ponenti, & rursus dividenti, eandem fore rationem. Ex iisdem autem & convertentis ratio est manifesta. Habeat enim AC ad CB majorem rationem quàm DF ad FE. Dico, etiam convertenti CA ad AB minorem rationem habere quàm FD ad DE. Quoniam enim AC ad CB majorem rationem habet quàm DF ad FE, etiam dividenti AB ad BC majorem rationem habet quàm DE ad EF. revertendo CB ad BA minorem rationem habet quàm FE ad ED. & componenti, CA ad AB minorem rationem habet quàm FD ad DE.

καὶ πάλιν διελόντι, ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. Ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντος λόγος ἐμφανής ἐστίν. ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. λέγω ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ, καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ. καὶ συνθέντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΖΔ πρὸς ΔΕ.

ARCHIMEDIS DE SPHÆRA & Cylindro libri II. Propositio VIII.

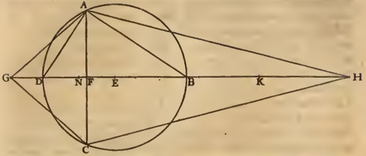
ΤΩΝ ἈΡΧΙΜΗΔΟΥΣ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοῦ β' πρότασις η'.

SI sphæra plano secetur, non per centrum; majus segmentum ad minus, minorem quidem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet majoris segmenti superficies ad minoris superficiem; majorem verò quàm sesquialteram.

ἘΑΝ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Sit sphæra, & maximus in ea circulus ABCD. & diametrus BD. Secetur autem plano per A C, recto ad circulum ABCD. sitque majus sphæræ

Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. καὶ διάμετρος ἡ ΒΔ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς ΑΓ, ὀρθῷ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. καὶ ἔστω



μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ΑΒΓ. λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑΔ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ Ε. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ· ὡς δὲ συναμφότερος ἡ ΕΒΖ πρὸς ΒΖ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. καὶ νοείσθωσαν κῶνοι, βάσιν μὲν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον ΑΖΓ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ Θ, Η σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν ΑΘΓ κῶνος τῷ ΑΒΓ τμήματι τῆς σφαίρας· ὁ δὲ ΑΓΗ τῷ ΑΔΓ. καὶ ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον

ſegmentum ABC. Dico, ſegmentum ABC ad ſegmentum ADC, minorem quidem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet ſuperficies majoris ſegmenti ad ſuperficiem ſegmenti minoris; majorem vero quàm ſeſquialteram. Jungantur enim B A, AD. ſitque centrum E. & fiat, ut ambæ EDF ad DF, ita HF ad FB; ut verò ambæ EBF ad BF, ſic GF ad FD. Intelligantur verò coni, baſin habentes circa diametrum AFC exiſtentem circulum, vertices autem H, G puncta. eritque æqualis AHC conus ſegmento ſphæræ ABC; & conus ACG ſegmento ADC. Et eſt, ut quadratum à BA ad quadratum ab AD, ita ſuperficies ſegmenti ABC ad ſuperficiem ſegmenti ADC. Hoc enim ſuprà ſcriptum eſt. Monſtrandum, majus ſphæræ ſegmentum ad

minus, minorem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet superficies majoris segmenti ad superficiem segmenti minoris. Dico, etiam conum A H C ad conum A G C, id est, H F ad F G, minorem rationem habere quàm duplam ejus, quam habet quadratum à B A ad quadratum ab A D, id est, B F ad F D. Quoniam enim est, ut ambæ E D F ad D F, sic H F ad F B; erit etiam, ut B F ad F D, sic H B ad B E. æqualis enim est B E ipsi D E. hoc enim in superioribus quoque est demonstratum. Rursus quoniam est, ut ambæ E B F ad B F, ita G F ad F D. sit ipsi B E æqualis B K: evidens enim, majorem esse H B quàm B E, quia & B F major quàm F D: eritque, ut K F ad F B, ita G F ad F D. ut autem B F ad F D, sic monstrata est H B ad B E. at æqualis est B E ipsi B K. Quare ut H B ad B K, sic K F ad F G. Et quoniam H F ad F K minorem rationem habet quàm H B ad B K; ut autem H B ad B K, sic monstrata est K F ad F G; Ergo H F ad F K minorem rationem habet quàm K F ad F G. Itaque minus est rectangulum ab H F G, quadrato ab F K. ergo rectangulum ab H F G

τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ ΑΘΓ *κῶνος πρὸς τὸν* ΑΗΓ, *τουτέστιν, ἡ* ΘΖ *πρὸς* ΖΗ, *ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ* ΒΑ *πρὸς τὸ ἀπὸ* ΑΔ, *τουτέστιν, ἡ* ΒΖ *πρὸς* ΖΔ. *καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς συναμφότερος ἡ* ΕΔΖ *πρὸς* ΔΖ, *οὕτως ἡ* ΘΖ *πρὸς* ΖΒ· *ἔσται καὶ ὡς ἡ* ΒΖ *πρὸς* ΖΔ, *ἡ* ΘΒ *πρὸς* ΒΕ. *ἴση γὰρ ἡ* ΒΕ *τῇ* ΔΕ. *τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς συναμφότερος ἡ* ΕΒΖ *πρὸς* ΒΖ, *ἡ* ΗΖ *πρὸς* ΖΔ. *ἔστω τῇ* ΒΕ *ἴση ἡ* ΒΚ. *δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἡ* ΘΒ *τῆς* ΒΕ, *ἐπεὶ καὶ ἡ* ΒΖ *τῆς* ΖΔ. *καὶ ἔσται, ὡς ἡ* ΚΖ *πρὸς* ΖΒ, *ἡ* ΗΖ *πρὸς* ΖΔ· *ὡς δὲ ἡ* ΒΖ *πρὸς* ΖΔ, *ἐδείχθη ἡ* ΘΒ *πρὸς* ΒΕ. *ἴση δὲ ἡ* ΒΕ *τῇ* ΒΚ. *ὡς ἄρα ἡ* ΘΒ *πρὸς* ΒΚ, *οὕτως ἡ* ΚΖ *πρὸς* ΖΗ. *καὶ ἐπεὶ ἡ* ΘΖ *πρὸς* ΖΚ *ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΘΒ *πρὸς* ΒΚ· *ὡς δὲ ἡ* ΘΒ *πρὸς* ΒΚ, *ἐδείχθη ἡ* ΚΖ *πρὸς* ΖΗ. *ἡ* ΘΖ *ἄρα πρὸς* ΖΚ *ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ* ΚΖ *πρὸς* ΖΗ. *ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν* ΘΖΗ *τοῦ ἀπὸ* ΖΚ. *τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν* ΘΖΗ

πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστιν, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ. ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΕ, τουτέστι, τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΚ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΝ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. καὶ τὸ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν,

ad quadratum ab FG, hoc est, HF ad FG, minorem rationem habet quàm quadratum à KF ad quadratum ab FG. At quadratum à KF ad quadratum ab FG duplam rationem habet rationis KF ad FG. Ergo HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet KF ad FG. Ergo & HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam rationis quadrati à BA ad quadratum ab AD, hoc est, rectæ BF ad FD. Hoc autem quærebamus. Et quoniam BE æqualis est ipsi ED, minus ergo est rectangulum à BFD rectangulo à BED. ergo FB ad BE minorem rationem habet quàm ED ad DF, hoc est, HB ad BF. Quare minus est quadratum ab FB rectangulo ab HBE, id est, rectangulo ab HBK. Sit quadratum à BN æquale rectangulo ab HBK. Est igitur, ut HB ad BK, sic quadratum ab HN ad quadratum ab NK. at quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK. Ergo & quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm HB ad BK, hoc est, HB ad BE,

hoc eſt, KF ad FG. Ergo HF ad FG majorem rationem habet quàm ſeſquialteram rationis KF ad FG. Hoc autem intendebamus. Et eſt, ut HF ad FG, ſic conus AHC ad conum AGC, id eſt, ſegmentum ABC ad ſegmentum ADC. ut autem KF ad FG, ita BF ad FD; id eſt, quadratum à BA ad quadratum ab AD; id eſt, ſuperficies ſegmenti ABC ad ſuperficiem ſegmenti ADC. Ergo majus ſegmentum ad minus, minorem quidem habet rationem quàm duplam ejus, quam habet ſuperficies majoris ſegmenti ad ſuperficiem ſegmenti minoris; majorem verò quàm ſeſquialteram.

ALITER.

SIt ſphæra, in qua maximus circulus, ABCD. & diametrus, recta AC. centrum verò, punctum E. & ſecetur plano per rectam BD, recto ad AC. Dico, majus ſegmentum DAB ad minus BCD, minorem quàm duplam rationem habere ejus, quam habet ſuperficies ſegmenti ABD ad ſuperficiem ſegmenti BCD; majorem verò quàm ſeſquialteram. Jungantur enim AB, BC. Superficiei verò ad ſuperficiem ratio eſt circuli, cujus

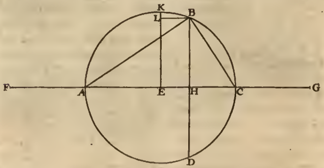
ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ. τοῦτο γὰρ ἐπὶ τέλει. καί ἐστιν, ὡς μὲν ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ὁ ΑΘΓ κῶνος πρὸς τὸν ΑΗΓ κῶνον τουτέσι, τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. τουτέσι, τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· τουτέστιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΑΔΓ τμήματος. ἄλλοτε τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

ἌΛΛΩC.

ΕΣτω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· διάμετρος δὲ ἡ ΑΓ· κέντρον δὲ τὸ Ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς ΒΔ, πρὸς τὴν ΑΓ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ ΔΑΒ, πρὸς τὸ ἔλασσον, τὸ ΒΓΔ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ τμήματος· μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος ὁ τοῦ κύκλου

ἐστὶν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ AB, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΒΓ, τουτέστιν, ὁ τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΘΓ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΓΗ·

radius AB, ad circulum, cujus radius BC; hoc est, rectæ AH ad HC. Ponatur circuli radio æqualis utraque ipsarum AF, CG. Porrò segmenti BAD ad



ὁ δὲ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον· καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος λόγος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον, ὁ τῆς ΗΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ· ὁ δὲ τοῦ κώνου πρὸς τὸν κῶνον, ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ· ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ ΒΓΔ, ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΖ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ, καὶ τοῦ ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ

segmentum BCD ratio conjuncta est ex ea, quam habet segmentum BAD ad conum, cujus quidem basis est circulus circa diametrum BD, vertex autem punctum A; & idem conus ad conum, qui eandem habet basin, at verticem, punctum C; & dictus conus ad segmentum B C D. Sed segmenti BAD ratio ad conum BAD, est rectæ GH ad HC; & coni ad conum, rectæ AH ad HC; & coni BCD ad segmentum B C D, rectæ A H ad H F. Conjuncta autem ratio ex ratione rectæ GH ad HC, & rectæ AH ad HC, est ratio rectanguli

ab AHG ad quadratum ab HC: & ratio rectanguli à GH, HA ad quadratum ab HC, una cum ratione rectæ AH ad HF, eſt ratio rectanguli à GH, HA in HA, ad quadratum HC in HF. At verò ratio rectanguli à GHA in HA, ad quadratum ab HC in HG, eſt ratio quadrati ab HA ad quadratum ab HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm duplam rationis AH ad HC, hoc eſt, quadrati ab AH ad quadratum ab HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG. Ergo majus eſt quadratum à CH in HF, quadrato à CH in HG. Quare major eſt recta HF quàm HG. Porro dico, etiam majus ſegmentum ad minus, majorem rationem habere quàm ſeſquialteram rationis ſuperficiei ad ſuperficiem. At ſegmentorum ratio monſtrata eſt eadem, quam habet quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF. Rationis autem ſuperficiei ad ſuperficiem ſeſquialtera eſt ratio cubi ab AB ad cubum à BC. Dico quoque,

τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΘΗ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘ, ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘ, ΘΑ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ διπλασίου, ὅς ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς ΘΗ. Φημὶ δὴ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, λόγον μείζονα ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον. Φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ

ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον· τουτέστιν, ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον· τουτέστιν, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. Φημὶ δὴ, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὃ ταυτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς

quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm cubus ab AB ad cubum à BC; hoc eſt, cubus ab AH ad cubum ab HB; hoc eſt, ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, & rectæ AH ad HB. At ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, aſſumtâ ratione rectæ AH ad HB, eſt ratio quadrati ab AH ad rectangulum à BHC. Et ratio quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, eſt ratio quadrati ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG. Atque hinc quoque dico, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC; hoc eſt, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG. Monſtrandum igitur, quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à BHC in HG. Quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH ad rectangulum à BHC, minorem rationem habere quàm habeat recta GH ad HF. Monſtrare itaque oportet, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm CH ad HB. Ducatur à puncto E ipſi EC ad angulos

rectos EK. & à puncto B perpendicularis super ipsam, B L. Monstrandum nobis restat, quare G H ad H F majorem rationem habeat quàm CH ad H B. æqualis autem est H F ambabus, A H, K E. Monstrare igitur oportet, rectam GH ad ambas, AH, K E, majorem rationem habere quàm CH ad HB. adeoque CH ablatâ ab H G; & L E, quæ æqualis est ipsi B H, ab E K; monstrandum erit, reliquam CG ad reliquas ambas, A H, KL, majorem rationem habere quàm CH ad HB, hoc est, HB ad H A, hoc est, L E ad H A. & permutando K E ad EL majorem rationem habere quàm habeant ambæ KL, HA ad HA. & dividenti, K L ad LE majorem rationem habere quàm KL ad HA, quia minor est LE quàm HA.

ἡ ΕΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν, ἡ Β Λ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ Η Θ πρὸς Θ Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. ἴση δέ ἐστιν ἡ Θ Ζ συναμφοτέρῳ τῇ Α Θ, Κ Ε. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ Η Θ πρὸς συναμφότερον τὴν Α Θ, Κ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς Θ Η τῆς Γ Θ, ἀπὸ δὲ τῆς Κ Ε τῆς Ε Λ, ἴσης τῇ Β Θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ Γ Η πρὸς λοιπὴν συναμφότερον, τὴν Α Θ, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β· τουτέστιν, ἡ Θ Β πρὸς Θ Α· τουτέστιν, ἡ Λ Ε πρὸς Θ Α. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Κ Ε πρὸς Ε Λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ Κ Λ, Θ Α πρὸς Θ Α. καὶ διελόντι, ἡ Κ Λ πρὸς Λ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Κ Λ πρὸς Θ Α, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ Λ Ε τῆς Θ Α.

EUTOCII COMMENTARIUS in I. demonstrationem.

Recta HF ad FG minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet quadratum à B A ad quadratum ab AD; hoc est, B F ad FD.] Quoniam enim in triangulo rectangulo ab angulo recto perpendicularis ducta est AF, triangulis ad perpendicularem

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ.

Ἡ Θ Ζ πρὸς Ζ Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ Β Α πρὸς τὸ ἀπὸ Α Δ· τουτέστιν, ἡ Β Ζ πρὸς Ζ Δ.] Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ἦκται ἡ Α Ζ, τῶν πρὸς τῇ καθέτῳ τριγώνων ὁμοίων ὄντων, ἐστιν,

ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΑΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται. ὡς ἄρα ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. συναχθείη δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΖ, τῆς ΒΔ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. καὶ ἔστι τῷ μὲν ὑπὸ ΔΒΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΑ· τῷ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ.] Καθόλου γάρ, ἐὰν ὦσι δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ συντεθὲν πρὸς τὸ συντεθέν.

exiſtentibus ſimilibus, eſt ut FB ad BA, ſic AB ad BD. & ut prima ad tertiam, ſic quadratum à prima ad quadratum à ſecunda; & quadratum à ſecunda ad quadratum à tertia, ut ſuperius eſt monſtratum. Ut ergo FB ad BD, ſic quadratum ab AB ad quadratum à BD. Sed ut BD ad DF, ſic quadratum à BD ad quadratum à DA. Ut enim prima ad tertiam, ſic quadratum à prima ad quadratum à ſecunda. Ergo & ex æquali, ut quadratum à BA ad quadratum ab AD, ſic BF ad FD. Sed & alio modo idem colligi poſſit ſic. Quia enim eſt, ut BF ad FD, ſic rectangulum à DBF ad rectangulum à BDF, rectâ BD communi altitudine ſumtâ. eſtque rectangulo à DBF æquale quadratum à BA; & rectangulo à BDF æquale quadratum ab AD. Ergo ut quadratum à BA ad quadratum ab AD, ſic BF ad FD.

Et quia HF ad FK minorem rationem habet quàm HB ad BK.] Univerſaliter enim, ſi ſint duæ magnitudines inæquales, & æquales illis addantur, major ad minorem, majorem rationem habet quàm compoſita ad compoſitam.

Sint enim duæ rectæ inæquales, AB, CD. & adpoſitæ ſint illis æquales BE, DF. Dico AB ad CD majorem rationem habere quàm AE ad CF. Quia enim major eſt AB quàm CD; AB ergo ad BE majorem rationem habet quàm CD ad BE, id eſt, ad DF. Quare & componenti AE ad EB majorem rationem habet quàm CF ad DF, ob prius demonſtrata.



ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ ΑΒ, ΓΔ. καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι, αἱ ΒΕ, ΔΖ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστι, πρὸς ΔΖ. ὥστε καὶ συνθέντι ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΔΖ, διὰ τὰ προδεδειγμένα.

Minus ergo eſt rectangulum ab HFG quadrato ab FK.] Si enim ſint tres rectæ continuæ, ut A, B, C. ita ut A ad B minorem rationem habeat quàm B ad C; rectangulum ab extremis A, C, minus eſt quadrato à media B. Si enim faciamus, ut A ad B, ſic B ad aliam quandam, erit ad majorem quàm C; ſeu minuere oportet rationem ipſius B ad C. eritque rectangulum ab A, & majore, C, æquale quadrato à B. ut rectangulum ab A, C, ſit minus quadrato à B.



Ἔλαττον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ.] Ἐὰν γὰρ ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς, ὡς αἱ Α, Β, Γ. ὥστε τὴν Α πρὸς τὴν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν Β πρὸς τὴν Γ· τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, τῶν Α, Γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης, τῆς Β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν Α πρὸς Β, οὕτως τὴν Β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς Γ· ἤπερ δεῖ ἐλαττῶσαι τὸν τῆς Β πρὸς Γ λόγον. καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς Α, καὶ τῆς μείζονος, τῆς Γ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Β. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς Β.

Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· τουτέστιν, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ὡς γὰρ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἔλασσον. τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλασσον.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ.] Τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΕΔ. τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΔ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ, ἴσόν ἐστι τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον, ὅτι ὅσῳ τῆς διχοτομίας ἀφέστηκεν τὸ Ζ μεῖζον, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων. μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν, ἴσον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων. ὥς τε εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων.

Ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.] Καθόλου γὰρ, ἐὰν ὦσι

Quare rectangulum ab HFG ad quadratum ab FG; id est, HF ad FG, minorem rationem habet quàm quadratum à KF ad quadratum ab FG. Ut enim HF ad FG, sic rectangulum ab HFG ad quadratum ab FG. At rectangulum ab HFG minus est quadrato ab FK. Major autem magnitudo, ad eandem, majorem rationem habet, quàm minor.

Et quia æqualis est recta BE ipsi ED; minus ergo rectangulum à BFD rectangulo à BED.] Etenim rectangulum à BED æquale est quadrato ab ED: at rectangulum à BFD, una cum quadrato ab EF, eidem æquale est. Et manifestũ, quo à bisectione magis distat punctum F, eò minus esse rectangulum à BFD rectangulo ab æqualibus. quippe una cum quadrato à recta inter sectiones sitâ, æquale fit rectangulo ab æqualibus. adeo ut, quamvis recta in inæquales partes secetur in alio atque alio puncto, rectangulum à segmentis bisectioni propioribus, majus sit rectangulo à segmentis remotioribus.

Ergo FB ad BE minorem rationem habet quàm ED ad DF.] Universaliter enim, si

ſint quatuor termini, ut A, B, C, DE. & ſit contentum ab A,DE minus contento à B, C; A ad B minorem rationem habet quàm C ad DE. Sit enim contentum à B, C æquale contento ab A, FE. Eſt igitur, ut A ad B, ita C ad FE. at C ad FE minorem rationem habet quàm ad ED. Ergo etiam A ad B minorem rationem habet quàm C ad DE.



τέσσαρες ὅροι, ὡς οἱ Α, Β, Γ, ΔΕ. καὶ ἡ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ Β, Γ· ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς ΔΕ. ἔστω γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΖΕ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν ΖΕ. ὁ δὲ Γ πρὸς τὸν ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν ΕΔ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς ΔΕ.

Eſt igitur, ut HB ad BK, ſic quadratum ab HN ad quadratum ab NK.] Quia enim rectangulo ab HBK æquale eſt quadratum à BN, tres rectæ proportionales ſunt, ut HB ad BN, ſic NB ad BK. & ut prima ad tertiam, HB ad BK, ſic quadratum à ſecunda ad quadratum à tertia; id eſt, quadratum à BN ad quadratum à BK, ut ſuperius eſt monſtratum. Rurſus quoniam eſt, ut HB ad BN, ita NB ad BK; componenti, ut HN ad NB, ſic NK ad KB. permutando, ut HN ad NK, ſic NB ad BK. Quare etiam ut quadratum ab HN ad quadratum ab NK, ſic

Ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ.] Ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΝ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ. καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ΘΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ. συνθέντι, ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΒ, ἡ ΝΚ πρὸς ΚΒ. ἐναλλὰξ, ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΚ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ

NB πρὸς τὸ ἀπὸ BK. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ NB πρὸς τὸ ἀπὸ BK, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΘB πρὸς BK. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘB πρὸς BK, οὕτως τὸ ἀπὸ ΘN πρὸς τὸ ἀπὸ NK.

Τὸ δὲ ἀπὸ ΘZ πρὸς τὸ ἀπὸ ZK μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘN πρὸς τὸ ἀπὸ NK.] Πάλιν γὰρ δύο ἀνίσοις, ταῖς ΘZ, ZK, πρόσκειται ἡ NZ. καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον, ἡ ΘZ πρὸς ZK μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘN πρὸς NK. ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘZ πρὸς τὸ ἀπὸ ZK μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘN πρὸς τὸ ἀπὸ NK· τουτέστιν, ἡ ΘB πρὸς BE· τουτέστιν, ἡ KZ πρὸς ZH. ἡ ἄρα ΘZ πρὸς ZH μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς KZ πρὸς ZH. νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ AB, Γ, Δ. ὥστε τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν Γ πρὸς τὴν Δ. λέγω ὅτι ἡ AB πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E. ἐπεὶ οὖν

quadratum ab NB ad quadratum à BK. Sed ut quadratum ab NB ad quadratum à BK, sic monstrata est HB ad BK. Quare etiam ut HB ad BK, sic quadratum ab HN ad quadratum ab NK.

At quadratum ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK.] Rursus enim duabus inæqualibus, HF, FK, adjecta est recta NF. & ob superius dictum, HF ad FK majorem rationem habet quàm HN ad NK. quare & dupla. Quadratum igitur ab HF ad quadratum ab FK majorem rationem habet quàm quadratum ab HN ad quadratum ab NK; id est, HB ad BE; id est, KF ad FG. Ergo HF ad FG majorem rationem habet quàm sesquialteram rationis KF ad FG. Intelligantur enim seorsim positæ rectæ, ut AB, C, D. ita ut quadratum ab AB ad quadratum à C, majorem rationem habeat quàm recta C ad D. Dico, rectam AB ad D majorem quàm sesquialteram rationem habere ejus quam habet C ad D. Sumatur enim inter C, D media proportionalis, E. Quoniam igitur quadratum

ab AB ad quadratum à C, majorem rationem habet quàm C ad D; ratio autem quadrati ab AB ad quadratum à C, dupla est rationis AB ad C; & ratio ipsius C ad D dupla est rationis C ad E: ergo & AB ad C majorem rationem habet quàm C ad E. Fiat igitur, ut E ad C, ita C ad BF. & quia quatuor sunt rectæ deinceps proportionales, BF, C, E, D; ergo BF ad D triplam rationem habet rationis BF ad C; hoc est, rationis C ad E. Sed & C ad D duplam rationem habet rationis C ad E. Quare BF ad D sesquialteram rationem habet rationis C ad D. Ergo AB ad D majorem rationem habet, quàm sesquialteram ejus, quam habet C ad D.



τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ λόγος διπλάσιός ἐστιν τοῦ τῆς AB πρὸς Γ· ὁ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς E· καὶ ἡ AB ἄρα πρὸς Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς E. γεγονέτω οὖν, ὡς ἡ E πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς BZ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν, αἱ BZ, Γ, E, Δ· ἡ BZ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BZ πρὸς Γ· τουτέστιν, ἡ Γ πρὸς E. ἔχει δὲ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς Γ πρὸς E. ἡ ἄρα BZ πρὸς Δ [ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ τῆς Γ πρὸς Δ. ἡ ἄρα AB πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ.]

LEMMA AD DEMONstrationem sequentem.

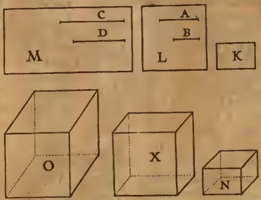
Sint quatuor termini, A, C, D, B. Dico, rationem compositam ex ratione contenti ab A, B, ad quadratum à C, una cum ratione B ad D, eandem esse quæ est ratio rectanguli

ΛΗ͂ΜΜΑ ΕἸΣ ΤὈ ἑξῆς.

Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι, οἱ A, Γ, Δ, B. λέγω, ὅτι ὁ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ τῶν A, B, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, μετὰ τοῦ τοῦ B πρὸς Δ λόγου, ὁ αὐτός ἐστι

τῶ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ἔσω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ Α, Β ἴσος ὁ Κ· τῷ δὲ ἀπὸ Γ ἴσος ὁ Λ. καὶ γεγονέτω, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, οὕτως ὁ

ab A, B in B, ad quadratum à C in D. Sit enim contento ab A, B æqualis terminus K; & quadrato à C æqualis L. & fiat, ut B ad D, sic L ad M.



Λ πρὸς Μ. ὁ ἄρα τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ Κ πρὸς Λ· τουτέστι, τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ· καὶ τοῦ Λ πρὸς Μ· τουτέστι, τοῦ Β πρὸς Δ. ὁ δὴ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν ποιείτω· ὁ δὲ Λ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω· τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας, τὸν Ο. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ὁ Κ ἐστὶν, ὁ δὲ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ὁ ἄρα Ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ Γ ὁ Λ ἐστὶν, ὁ δὲ Λ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν· ὁ Ο ἄρα ἐστὶν

Quare ipsius K ad M ratio composita est ex ratione K ad L; hoc est, contenti ab A, B ad quadratum à C; & ratione L ad M; hoc est, B ad D. Porro K ipsum B multiplicans faciat N; & L ipsum B multiplicans faciat X; & ipsum D multiplicans, O. Quoniam igitur contentum ab A, B est terminus K; at K ipsum B multiplicans fecit N: Ergo N est qui continetur ab A, B in B. Rursus quia quadratus à C est L, at L ipsum D multiplicans fecit O; ergo O est quadratus

à C in D. Quare ratio contenti ab A,B in B, ad quadratum à C in D, eadem eſt quæ ratio ipſius N ad O. Monſtrare igitur oportet, ipſius K ad M rationem eandem eſſe quæ ipſius N ad O. Quoniam igitur uterque ipſorum K, L, ipſum B multiplicans, utrumque ipſorum N, X fecit; eſt igitur, ut K ad L, ſic N ad X. Rurſus quia L utrumque ipſorum B,D multiplicans, utrumque ipſorum X, O fecit; eſt igitur, ut B ad D, ſic X ad O. Sed ut B ad L, ſic L ad M. ergo etiam ut L ad M, ſic X ad O. Ergo termini K,L,M cum terminis N,X,O in eadem ratione ſunt, bini ac bini ſumti. Ergo & ex æquali eſt, ut K ad M, ſic N ad O. Et ratio ipſius K ad M eadem eſt illi, quæ compoſita eſt ex ratione contenti ab A,B, ad quadratum à C; & ratione quam habet B ad D. At ratio ipſius N ad O eadem eſt quæ contenti ab A,B in B, ad quadratum à C in D. Ergo compoſita ratio ex ratione contenti ab A,B ad quadratum à C, & ex ea, quam habet B ad D, eadem eſt quæ contenti ab A, B in B ad quadratum à C in D.

Evidens quoque hoc, contentum ab A,B in B, æquale

ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ὥς τε ὁ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερος τῶν Κ, Λ, τὸν Β πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ξ. πάλιν ἐπεὶ ὁ Λ ἑκάτερον τῶν Β, Δ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν Ξ, Ο πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Ξ πρὸς Ο. ἀλλ' ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Λ πρὸς Μ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Λ πρὸς Μ, ὁ Ξ πρὸς Ο. οἱ ἄρα Κ, Λ, Μ τοῖς Ν, Ξ, Ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, σύνδυο λαμβανόμενοι. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ Κ πρὸς Μ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ο. καὶ ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ. ὁ δὲ τοῦ Ν πρὸς Ο λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ. ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ.

Φανερὸν δὲ καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ

τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β, τοῦ Β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου. ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α.

ΕΙΣ ΤΟ ΑΛΛΩΣ τοῦ Η.

Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τὸ μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν πάντα κατὰ τὸ ἑξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησι, ὅτι ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον· καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα· δηλαδὴ

esse quadrato à B in A. Quia enim est, ut A ad B, sic contentum ab A, B ad quadratum à B, ipso B communi altitudine sumto. Jam verò, si quatuor termini proportionales sint, contentum ab extremis æquale est contento à mediis: Est ergo contentum ab A, B in B æquale quadrato à B in A.

IN ALTERAM DEMONstrationem propositionis VIII.

Dictum est in præcedentibus, si inter duas magnitudines media sumatur, extremarum rationem compositam esse ex ea quam habet prima ad mediam, & media ad tertiam. Similiter quoque si plures mediæ sumantur, extremarum rationem compositam esse ex rationibus, quas habent omnes ordine ad se invicem magnitudines. Quare & hîc dicit, segmenti BAD ad segmentum BCD rationem compositam esse & ex ea, quam habet segmentum BAD ad conum, cujus basis quidem est circulus circa diametrum BD, vertex autem punctum A; & idem conus ad conum, qui basin quidem eandem habet, verticem verò punctum C; & dictus conus ad segmentum BCD. nempe inter segmentum

DAB, & BCD, mediis sumtis dictis conis. Porro segmenti BAD ad conum BAD ratio eadem est quæ rectæ GH ad HC, ob porismasecundi theorematis libri secundi. Dicebatur enim segmentum ad conum in ipso, hanc habere rationem, quam habet utraque simul, nempe recta ex centro sphæræ, & altitudo reliqui segmenti, ad altitudinem reliqui segmenti. Cæterum coni BAD ad conum BCD ratio eadem est quæ rectæ AH ad HC. quippe supra eadem basi existentes, inter se sunt ut altitudines. Deinde coni BCD ad segmentum BCD ratio ea est quæ rectæ AH ad HF, propter reverrendo dicti porismatis. adeo ut segmenti BAD ad segmentum BCD ratio composita sit & ex ratione rectæ GH ad HC, & AH ad HC, & AH ad HF. Ratio autem composita ex ratione rectæ GH ad HC, unà cum ratione ipsius AH ad HC, est ratio rectanguli à GHA ad quadratum ab HC. Æquangula enim parallelogrammata rationem habent compositam ex lateribus. Porrò ratio rectanguli à GHA ad quadratum ab HC, unà cum ratione ipsius AH ad HF, est ratio rectanguli à GHA in HA, ad quadra-

τοῦ ΔΑΒ τμήματος, καὶ τοῦ ΒΓΔ, μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κώνων. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον, ὁ τῆς ΗΘ ἐσὶ πρὸς ΘΓ, διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου. ἐλέγετο γὰρ τὸ τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἥτε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὁ δὲ τοῦ ΒΑΔ κώνου πρὸς τὸν ΒΓΔ κῶνον, ὁ τῆς ΑΘ ἐσὶ πρὸς ΘΓ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα, ὁ τῆς ΑΘ ἐσὶ πρὸς ΘΖ, διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος. ὥς τε ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμῆμα λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐσὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλογράμματα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐσὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ, πρὸς

τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν Θ Z, ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν Θ Η. καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι. ὁ ἄρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμῆμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν Θ Η, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ· τουτέστι, τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΓ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσι θεωρήμασι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. ἀλλὰ τοῦ τῆς Α Θ πρὸς ΘΓ λόγου διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ὅτι

tum à CH in HF, ut monstratum est in præcedente lemmate. Terminus autem rectanguli à GHA in HA, idem est qui quadrati ab AH in HG. nam & hoc quoque in præmisso lemmate est demonstratum. Ergo segmenti ad segmentum ratio eadem est quæ quadrati ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF. Quia igitur monstrare oportet, segmentum ad segmentum, minorem rationem habere quàm duplam rationis superficiei ad superficiem; monstrare igitur oportet, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem quàm duplam rationem habere ejus, quam habet superficies segmenti BAD ad superficiem segmenti BCD; hoc est, ejus quam habet quadratum ab AB ad quadratum à BC. Sed ut quadratum ab AB ad quadratum à BC, sic AH ad HC. Hoc enim monstratum est in præcedentibus theorematis. Monstrare igitur oportet, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem habere rationem quàm duplam rationis rectæ AH ad HC. Sed rationis rectæ AH ad HC dupla est ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HC. Monstrandum

igitur est, quadratum ab A H in H G ad quadratum à C H in H F, minorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad quadratum ab H C. Sed ut quadratum ab AH ad quadratum ab H C, ipsâ HG communi altitudine sumtâ, sic quadratum ab AH in H G, ad quadratum à CH in HG. Monstrandum igitur est, quadratum ab AH in H G, ad quadratum à CH in H F, minorem rationem habere quàm idem quadratum ab A H in H G, ad quadratum à C H in HG. Ad quam autem magnitudinem eadem minorem rationem habet, illa major est. Monstrare igitur oportet, quadratum à C H in H F, majus esse quadrato à C H in H G; hoc est, majorem esse FH quàm H G. Est verò hoc manifestum. Inæqualibus enim, ipsis A H, H C, æquales adpositæ sunt, rectæ FA, CG.

Cum hæc dixisset, ipse quidem compositionem non subjunxit; nos autem illam adponemus. Quoniam FH major est quàm H G, quadratum à CH in HF majus est quadrato à CH in HG. Itaque quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm idem qua-

ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, τῆς ΘΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ἀπὸ Α Θ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν Θ Η. χρὴ ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αὐτὸ, τὸ ἀπὸ Α Θ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν ΘΗ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν ΘΗ. τουτέστιν, ὅτι μείζων ἡ ΖΘ τῆς ΘΗ. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν. ἀνίσοις γὰρ ταῖς ΑΘ, ΘΓ, ἴσαι πρόσκεινται αἱ ΖΑ, ΓΗ.

Ταῦτα εἰπὼν, αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν. ἡμεῖς δ' αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ΖΘ τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶ, τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν Θ Ζ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν Θ Η. ὥστε τὸ ἀπὸ Α Θ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Θ ἐπὶ τὴν Θ Ζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ

αὐτὸ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ᾽ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ λόγος διπλάσιός ἐστι τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν, ὃν ἔχει ἡ ΑΘ πρὸς ΘΓ. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἑξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος, ἐπάγει.

Φημὶ δή, ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸν ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ ὃν

dratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG. Sed ut quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HG, sic quadratum ab AH ad quadratum à CH. Quare quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm quadratum ab AH ad quadratum ab HC. Sed ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HC dupla est rationis rectæ AH ad HC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, minorem rationem habet quàm duplam ejus, quam habet recta AH ad HC. Jam verò segmentorum rationem eandem monstravimus, quam habet quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF: at superficierum rationem, quam habet recta AH ad HC. Ergo segmentum ad segmentum minorem rationem habet quàm duplam rationis superficiei ad superficiem. Deinde resolvens alteram partem theorematis, subjungit.

Dico quoque, majus segmentum ad minus, majorem rationem habere quàm sesquialteram rationis superficiei ad superficiem. At segmentorum quidem rationem monstravimus eandem esse, quam

habet quadratum ab A H in H G, ad quadratum à C H in H F; rationis autem superficiei ad superficiem sesquialtera est ratio cubi ab AB ad cubum à BC.] Rationis quippe rectæ AB ad BC dupla quidem est ratio quadrati ab AB ad quadratum à B C; tripla autem, ratio cubi à recta AB ad cubum à B C. Sed ut cubus ab AB ad cubum à BC, sic cubus ab AH ad cubum ab H B. Ut enim AB ad BC, sic A H ad HB, ob triangulorum ABC, ABH similitudinem. Jam verò si quatuor rectæ proportionales sint, etiam solida ab ipsis, similia & similiter deformata sunt proportionalia. Quare cubus ab A H ad cubum ab H B, sesquialteram rationem habet ejus, quam habet quadratum ab A B ad quadratum à B C; hoc est, superficies ad superficiem. Sed ut segmentum ad segmentum, sic quadratum ab AH in H G, ad quadratum à CH in H F. Dico igitur, quadratum ab A H in H G, ad quadratum à C H in HF, majorem rationem habere quàm cubus ab AH ad cubum ab H B; hoc est, qua-

ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ· τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιός ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον.] Τοῦ γὰρ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ διπλάσιος μέν ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον· τριπλάσιος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον. ὡς γὰρ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓ, ΑΒΘ, τριγώνων. ἐὰν δὲ ὦσι τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεά, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον εἰσίν. ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον, ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον· τουτέστιν, ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. ἀλλ᾽ ὡς τὸ τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. Φημὶ οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον· τουτέστιν, τὸ ἀπὸ

ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, διπλασίων τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον. ἑκάτερος γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, προσλαβὼν τὸν τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓϑΒ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ϑΒ πρὸς ϑΓ· τῆς Βϑ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης· ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, μετὰ τοῦ τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, μετὰ τοῦ τῆς Βϑ πρὸς ϑΓ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς Βϑ πρὸς ϑΓ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Βϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ, τῆς Βϑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. ὥς τε ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ λόγος, μετὰ τοῦ τῆς Αϑ πρὸς ϑΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ἀπὸ ϑΒ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ϑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ. ἀλλ᾽ ὁ τοῦ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ λόγος, ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ ἀπὸ

dratum ab AH ad quadratum ab HB, & recta AH ad HB. Ratio enim quadrati ab AH ad quadratum ab HB, dupla rationis rectæ AH ad HB, adſumens rationem rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ cubi ab AH ad cubum ab HB. utraque enim ejuſdem tripla eſt. Porro ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, adſumens rationem rectæ AH ad HB, eſt ratio quadrati ab AH ad rectangulum à CHB. Quoniam enim ratio rectæ AH ad HB eadem eſt quæ rectæ HB ad HC; rectâ BH mediâ proportionaliter exiſtente; ratio quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ BH ad HC. Sed ratio rectæ BH ad HC, eadem eſt quæ quadrati à BH ad rectangulum à BHC, rectâ BH communi altitudine ſumtâ. Quare quadrati ab AH ad quadratum ab HB ratio, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem eſt quæ quadrati ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione quadrati ab HB ad rectangulum à BHC. Sed quadrati ab AH ad rectangulum à BHC ratio, compoſita eſt ex

ratione quadrati ab AH ad quadratum à BH, & ratione quadrati à BH ad rectangulum à BHC, quadrato à BH medio sumto. Quare quadrati ab AH ad quadratum ab HB ratio, una cum ratione rectæ AH ad HB, eadem est quæ quadrati ab AH ad rectangulum à BHC. Ratio autem quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, eadem est quæ quadrati ab AH in HG, ad rectangulum à BHC in HG, rectâ GH communi altitudine sumtâ.

Atque hinc quoque dico, quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habere quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC; hoc est, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HG.] Ad quam autem magnitudinem eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Monstrandum igitur, quadratum à CH in HF minus esse rectangulo à BHC in HG. quod idem est ac monstrare, quadratum à CH ad rectangulum à CHB minorem rationem habere quàm recta GH ad HF.] Si enim sint quatuor termini, ut hîc, quadratum à CH, & rectangulum à CHB, & rectæ HG, HF; sitque con-

ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ, καὶ τȣ̃ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τȣ̃ ἀπὸ ΒΘ μέσȣ λαμβανομένȣ. ὥς τε ὁ τȣ̃ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ λόγος, μετὰ τȣ̃ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐςι τῷ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ: ὁ δὲ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ λόγος, ὁ αὐτός ἐςι τῷ τȣ̃ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ ἐπὶ τὴν ϑΗ, τῆς ϑΗ κοινȣ̃ ὕψȣς λαμβανομένης.

Φημὶ δὴ, ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ Γϑ ἐπὶ τὴν ϑΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Αϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒϑΓ· τȣτέςι, τὸ ἀπὸ Αϑ ἐπὶ τὴν ϑΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓϑΒ ἐπὶ τὴν ϑΗ.] πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσον ἐςί.

Δεικτέον ȣ̃ν, ὅτι τὸ ἀπὸ Γϑ ἐπὶ τὴν ϑΖ ἔλασσόν ἐςι τȣ̃ ὑπὸ ΒϑΓ ἐπὶ τὴν ϑΗ. ὃ ταυτόν ἐςι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ Γϑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓϑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ηϑ πρὸς ϑΖ.] Ἐὰν γὰρ ὦσι τέσσαρες ὅροι, ὡς ἐνταῦθα, τὸ ἀπὸ Γϑ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓϑΒ, καὶ ἡ ϑΗ, καὶ ϑΖ. καὶ τὸ

ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ἢ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἐχρῆν δεῖξαι, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ταυτόν ἐστιν τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ.

Δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ· τουτέστιν, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ. καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἴση δέ ἐστιν ἡ ΘΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΘΑ, ΚΕ. ἡ γὰρ ΑΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστί. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφότερον τὴν ΘΑ, ΚΕ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΗΘ τῆς ΘΓ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΕ

tentum ab extremis minus contento à mediis; primus ad ſecundum minorem rationem habet quàm tertius ad quartum, ut monſtratum eſt ſuperius. Merito igitur monſtrare oportebat, quadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à CHB in HG: quod idem eſt ac monſtrare, quadratum à CH ad rectangulum à CHB, minorem rationem habere quàm recta GH ad HF. Sed ut quadratum à CH ad rectangulum à CHB, ſic recta CH ad HB.

Monſtrandum igitur eſt, rectam CH ad HB minorem rationem habere, quàm recta GH ad HF; hoc eſt, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm recta CH ad HB. Ducatur à puncto E, ipſi EC ad angulos rectos recta EK. & à puncto B perpendicularis ſupra ipſam, recta BL. Monſtrandum nobis reſtat, rectam GH ad HF majorem rationem habere quàm recta CH ad HB. Æqualis autem eſt recta HF ambabus HA, KE. quippe AF radio æqualis eſt. Monſtrandum igitur eſt, rectam GH ad ambas HA, KE majorem rationem habere quàm CH ad HB. Quare etiam, ablatâ CH ab HG, & LE, quæ

æqualis eſt ipſi B H, ab E K, monſtrandum erit, reliquam C G ad reliquas ambas, A H, K L, majorem rationem habere quàm C H ad H B.] Quoniam enim monſtrandum eſt, rectam G H ad ambas, H A, K E, majorem rationem habere quàm C H ad H B. & permutando, rectam G H ad H C majorem rationem habere quàm ambæ H A, K E, ad H B, hoc eſt, ad L E. & dividenti, rectam G C ad C H majorem rationem habere quàm ambæ H A, K L, ad L E, hoc eſt, ad B H. permutando, rectam G C ad ambas, H A, K L, majorem rationem habere quàm C H ad H B. Sed ut recta C H ad H B, ſic recta H B ad H A; hoc eſt, recta L E ad A H. Monſtrandum ergo eſt, rectam G C ad ambas H A, K L, majorem rationem habere quàm recta L E ad A H. & permutando, rectam C G, hoc eſt, K E ad E L majorem rationem habere quàm ambæ, K L, H A ad H A. dividenti, rectam K L ad L E majorem rationem habere quàm ipſa K L ad H A; hoc eſt, rectam L E minorem eſſe quàm H A.

Deinceps nos compoſitionem adponemus. Quoniam L E minor eſt quàm A H, igi-

τῆς Ε Λ, ἴσης τῇ Β Θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ Γ Η πρὸς λοιπὴν συναμφότερον, τὴν Α Θ, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β.] Ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ Η Θ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, Κ Ε, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Η Θ πρὸς Θ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Θ Α, Κ Ε πρὸς Θ Β, τουτέστι, πρὸς Λ Ε. καὶ διελόντι, ἡ Η Γ πρὸς Γ Θ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Θ Α, Κ Λ, πρὸς Λ Ε, τουτέστι, πρὸς Β Θ. ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Η Γ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β. ἀλλ' ὡς ἡ Γ Θ πρὸς Θ Β, οὕτως ἡ Θ Β πρὸς Θ Α· τουτέστιν, ἡ Λ Ε πρὸς Α Θ. ὅτι ἄρα ἡ Η Γ πρὸς συναμφότερον, τὴν Θ Α, Κ Λ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Λ Ε πρὸς Α Θ. καὶ ἐναλλὰξ, ὅτι ἡ Γ Η, τουτέστιν, ἡ Κ Ε πρὸς Ε Λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος, ἡ Κ Λ, Θ Α, πρὸς Θ Α. διελόντι, ἡ Κ Λ πρὸς Λ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ αὐτὴ ἡ Κ Λ πρὸς Θ Α· τουτέστιν, ὅτι ἐλάττων ἡ Λ Ε τῆς Θ Α ἐστίν.

Ἑξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ Λ Ε τῆς Α Θ ἐλάττων, ἡ ἄρα

ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΛ πρὸς ΑΘ. συνθέντι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΑΘ. ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΒΘ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς ΒΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΑΘ. ἐναλλάξ, ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς συναμφότερον τὴν ΚΛ, ΑΘ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἐναλλάξ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος, ἡ ΚΛ, ΑΘ, πρὸς ΘΒ. συνθέντι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ συναμφότερος ἡ ΚΛ, ΑΘ, μετὰ τῆς ΘΒ, τουτέστι, συναμφότερος, ἡ ΑΘ, ΚΕ, πρὸς ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΚΕ τῇ ΑΖ. ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς Θ Β. ἐναλλάξ, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ὡς δὲ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. καὶ διὰ πρότερον εἰρημένα, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ

tur KL ad LE majorem rationem habet quàm KL ad AH. componenti KE ad EL majorē rationem habet quàm ambæ KL, AH, ad AH. recta autem LE æqualis est ipsi BH. Quare recta GC ad BH majorem rationem habet quàm ambæ KL, AH, ad AH. permutando ergo GC ad ambas KL, AH, majorem rationem habet quàm recta BH ad HA, hoc est, recta CH ad HB. permutando recta GC ad CH majorem rationē habet quàm ambæ KL, AH, ad HB. componenti recta GH ad HC majorem rationem habet quàm ambæ, KL, AH, una cum recta HB, hoc est, ambæ AH, KE, ad BH. æqualis autem est recta KE ipsi AF. Ergo recta GH ad HC majorem rationem habet quàm FH ad HB. permutando, recta GH ad HF majorem rationē habet quàm recta CH ad HB. ut autem recta CH ad HB, sic quadratum à CH ad rectangulum à CHB. Ergo recta GH ad HF majorem rationem habet quàm quadratum à CH ad rectangulum à CHB. & ob prius dicta, quadratum à CH in HF minus est rectangulo à CHB in HG. Ergo quadratum ab AH in HG, ad qua-

dratum à CH in HF majorem rationem habet quàm quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HG; hoc est, quadratum ab AH in HG, ad rectangulum à CHB in HF majorem rationẽ habet quàm quadratum ab AH ad rectangulum à BHC. Ratio autem quadrati ab AH ad rectangulum à BHC, quadrato à BH medio sumto, composita est & ex ratione quam habet quadratum ab AH ad quadratum ab HB, & quam habet quadratum à BH ad rectangulum à BHC. Sed ratio quadrati à BH ad rectangulum à BHC eadem est quæ rectæ BH ad HC; hoc est, rectæ AH ad BH. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habet quàm quadratum ab AH ad quadratum ab HB, una cum ratione rectæ AH ad HB. Ratio autem composita & ex ratione quadrati ab AH ad quadratum ab HB, & rectæ AH ad HB, eadem est quæ cubi ab AH ad cubum ab HB; hoc est, cubi ab AB ad cubum à BC. Ergo quadratum ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, majorem rationem habet, quàm cubus ab AB ad cubum à BC. Sed ratio quadrati

ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ· τουτέστι, τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, τοῦ ἀπὸ ΒΘ μέσου λαμβανομένου, σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ· τουτέστι, τῷ τῆς ΑΘ πρὸς ΒΘ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβου, πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον· τουτέστι, τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον. τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον. ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ

ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ λόγ@ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον λόγ@, ἡμιόλι@ ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου. τὸ ἄρα τμῆμα πρὸς τὸ τμῆμα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν.

ab AH in HG, ad quadratum à CH in HF, eadem monstrata est quæ segmentorum ratio. at ratio cubi ab AB ad cubum à BC, sesquialtera monstrata est rationis superficierum. Ergo segmentum ad segmentum majorem rationem habet quàm sesquialteram ejus quam habet superficies ad superficiem.

SEQUITUR TABULA RATIONIS SUPERoctagesimæ, (quam commatis rationem recentiores faciunt,) centiesduodecies sibi superadditæ: quâ, tanquam communi mensurâ, cæterarum rationum magnitudinem deinceps explorabimus.

1.	81 80	13.	6461081889 5497558138	25.	5153775207 3777893186	37.	4110983169 2596148429
2.	6561 6400	14.	5233476330 4398046511	26.	4174557917 3022314549	38.	3329896363 2076918743
3.	531441 512000	15.	4239115827 3518437208	27.	3381391913 2417851639	39.	2697216054 1661534994
4.	43046721 40960000	16.	3433683820 2814749767	28.	2738927449 1934281311	40.	2184745005 1329227995
5.	3486784401 3276800000	17.	2781283894 2251799813	29.	2218531234 1547425049	41.	1769643454 1063382396
6.	2824295364 2621440000	18.	2252839954 1801439850	30.	1797010299 1237940039	42.	1433411197 850705917
7.	2287679245 2097152000	19.	1824800363 1441151880	31.	1455578342 990352031	43.	1161063070 680564733
8.	1853020188 1677721600	20.	1478088294 1152921504	32.	1179018457 792281625	44.	9404610869 5444517870
9.	1500946352 1342177280	21.	1197251518 922337203	33.	9550049507 6338253001	45.	7617734804 4355614296
10.	1215766545 1073741824	22.	9697737297 7378697629	34.	7735540101 5070602400	46.	6170365191 3484491436
11.	9847709021 8589934592	23.	7855167211 5902958103	35.	6265787482 4056481920	47.	4997995805 2787593149
12.	7976644307 6871947673	24.	6362685441 4722366482	36.	5075287860 3245185536	48.	4048376603 2230074519

49.	3279185047 1784059615	72.	2575854686 1053122916	95.	2023376927 621654045		9 4.	65.	66.
50.	2656139888 1427247692	73.	2086442296 842498333	96.	1638935311 497323236		27 8.	97.	98.
51.	2151473309 1141798153	74.	1690018259 673998666	97.	1327537602 397858589		4 3.	23.	24.
52.	1742693381 913438523	75.	1368914790 539198933	98.	1075305457 318286871		16 9.	46.	47.
53.	1411581638 730750818	76.	1108820988 431359146	99.	8709974208 2546294970		64 27.	69.	70.
54.	1143381127 584600654	77.	8981449541 3450873173	100.	7055079108 2037035976		256 81.	92.	93.
55.	9261387130 4676805238	78.	7274974452 2760698538	101.	5714614078 1629628781		5 4.	17.	18.
56.	7501723576 3741444190	79.	5892729306 2208558830	102.	4628837403 1303703024		25 16.	35.	36.
57.	6076396096 2993155352	80.	4773110738 1766847064	103.	3749358296 1042962419		6 5.	14.	15.
58.	4921880838 2394524251	81.	3866219697 1413477651	104.	3036980220 834369935		36 25.	29.	30.
59.	3986723479 1915619425	82.	3131637955 1130782121	105.	2459953978 667495948		9 8.	9.	10.
60.	3229246017 1532495540	83.	2536626743 904625697	106.	1992562722 533996758		81 64.	18.	19.
61.	2615689274 1225996432	84.	2054667662 723700557	107.	1613975805 427197407		729 512.	28.	29.
62.	2118708312 980797146	85.	1664280806 578960446	108.	1307320402 341757925		6561 4096.	37.	38.
63.	1716153733 784637716	86.	1348067453 463168356	109.	1058929525 273406340		59049 32768.	47.	48.
64.	1390084523 627710173	87.	1091934637 370534685	110.	8577329159 2187250724		531441 262144.	56.	57.
65.	1125968464 502168138	88.	8844670561 2964277484	111.	6947636618 1749800579		10 9.	8.	9.
66.	9120344560 4017345110	89.	7164183154 2371421987	112.	5627585661 1399840463		100 81.	16.	17.
67.	7387479093 3213876088	90.	5802988355 1897137590	*Ratio*	*major est cõmatis*	*minor cõmatis*	16 15.	5.	6.
68.	5983558066 2571100870	91.	4700420567 1517710072	2 1.	55.	56.	25 24.	3.	4.
69.	4846925033 2056880596	92.	3807340659 1214168057	3 1.	88.	89.	128 125.	1.	2.
70.	3926009277 1645504557	93.	3083945934 971334446	4 1.	111.	112.	256 243.	4.	5.
71.	3180067514 1316403645	94.	2497996206 777067556	3 2.	32.	33.	65536 59049.	8.	9.

OMnia hæc veterum auctorum loca adducenda ante censuit Euthymius, quàm ad ipsam rationum compositionem veniret. Quamvis etiam ad alia, vel probanda, vel refellenda, quædam pertineant, quæ unum in locum congerere satius fore judicatum est, quàm ut hîc illîc infarcirentur. Cæterum rationum compositioni illa præmittam, inquit, quæ ad explorandam earum quantitatem pertinent, adeoque earum inter se differentiam cognoscendam; quo nempe excessu major ratio superet minorem; vel contrà, quanto defectu minor à majore deficiat. Quod fit reductione propositarum rationum ad communes terminos, vel antecedentes, vel consequentes; ut in Arithmeticis minutiis, vulgò ad eosdem terminos consequentes, seu denominatores. Sint enim duæ minutiæ $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$, quas conjungere velim, aut quarum differentiam, minore à majori ablatâ, cognoscere expetam. Hoc fieri nequit, additis binis superioribus terminis, 3 & 2, quos numeratores vocant; & binis inferioribus, 4 & 3, quos adpellant denominatores, ut fiat compósita minutia $\frac{5}{7}$, æqualis binis, $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$. quandoquidem in diversas partes harum binarum minutiarum integra, seu unitates sunt divisæ. quod exemplo in materia fundato clarius evadet. Thalerum imperialem quem vocant, non integrum habeo, sed tres tantùm illius partes quartas, seu tres quadrantes; id est, thaleri imperialis in quatuor æquales partes divisi; puta ortas thaleri, quas Germani vocant, quarum singulæ 12 solidos Lubecenses valent; non habeo omnes quatuor partes, seu ortas; ita quippe integrum thalerum impe-

rialem haberem; ſed tres tantùm illius habeo partes; id eſt, ter duodena, ſeu, minutæ pecuniæ, 36 ſolidos Lubecenſes. Rurſus, thaleri imperialis habeo duas partes tertias; ſeu, thaleri imperialis in tres trientes; quorum ſinguli valent marcam Lubecenſem, ſeu 16 Lubecenſes ſolidos; diviſi habeo duos tantùm trientes, id eſt, duas marcas Lubecenſes, ſeu, minutæ pecuniæ 32 ſolidos. Duarum harum minutiarum; nempe, trium ortarum thaleri, & duarum marcarum Lubecenſium; additarum ſummam, in minutiore moneta, ſcire deſidero. Ad eaſdem itaque partes, ſeu nummos, ut in hoc exemplo dicam, utriſque partibus, quartæ & tertiæ numerandis communes, binæ illæ minutiæ ſunt reducendæ. quod fit, multiplicatis inter ſe denominatoribus, 4 & 3. ut exurgant 12. ut nempe cogitem, utrumque thalerum imperialem, quorum $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{3}$ habeo, in duodenas partes fuiſſe tributum, quarum ſingulæ 4 ſolidos Lubecenſes valent. Prioris igitur minutiæ $\frac{3}{4}$, denominatorem 4, per alterius minutiæ $\frac{2}{3}$ denominatorem, nempe 3, multiplicavi; per eundem igitur denominatorem 3, etiam prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ numeratorem, nempe 3, multiplicare debeo, ut fiant 9. Itaque per eundem numerum 3, utrumque terminum minutiæ $\frac{3}{4}$ multiplicavi, adeoque eſt, ut 3 ad 4, ſic 9 ad 12. Ergo pro minutia $\frac{3}{4}$ habeo aliam in majoribus numeris minutiam, $\frac{9}{12}$, ſed quæ quantitate priori plane congruat. quippe prioris minutiæ integrum ſectum erat in quatuor partes, quarum tres habebam; ſed in hac minutia $\frac{9}{12}$, ſingulæ prioris minutiæ partes ſubdiviſæ ſunt in partes tres. In poſteriore igitur hac minutia partes adeo

minutæ sunt, ut tertiæ singulis prioris minutiæ sint æquales. Sic porro pro secunda minutia $\frac{2}{3}$, aliam æque magnam, sed quæ denominatorem habeat 12, substituemus. Per 4, prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ denominatorem, multiplicavi secundæ minutiæ denominatorem, nempe 3, & facta sunt 12. per eundem prioris minutiæ $\frac{3}{4}$ denominatorem, nempe 4, multiplicandus quoque est secundæ minutiæ $\frac{2}{3}$ numerator, nempe 2, ut fiant 8. Itaque per eundem numerum 4, utrumque terminum minutiæ $\frac{2}{3}$ multiplicavi; adeoque est, ut 2 ad 3, sic 8 ad 12. Æqualis ergo est minutia $\frac{8}{12}$ minutiæ $\frac{2}{3}$. quippe si minutiæ, vel rationis uterque terminus, per eundem numerum multiplicetur, ejusdem quantitatis minutia, vel ratio exurgit. Hoc adhuc clarius, inquit, ô Hermotime, qui rudis adeo ad hæc cognoscenda accedis, ut præter ingenii aliquod acumen nihil adferas, tibi exponam. Duo mala me habere puta, æque magna, quæ inter tres pueros, ætate differentes, distribuere velim, ita ut major natu accipiat $\frac{3}{4}$ unius mali; natu medius, $\frac{2}{3}$ alterius mali; minimus capiat utriusque mali reliquias. Scindo unum malum in quatuor æquales partes, quarum tres accipit puer maximus: alterum scindo in tres æquas partes, quarum duas capit medius. Ergo minimus primi mali, in quatuor partes divisi, accipit unam partem; & alterius item mali, in tres partes divisi, partem unam. habet ergo binorum malorum, inter se æqualium, duas partes, quartam & tertiam. Sed quantum quisque acceperit, ob partium inæqualitatem, ignorant. Ut igitur accurate hoc videant, scindo maximi pueri, qui tres partes

quartas acceperat, singulas partes quartas, seu quadrantes, in tres particulas, ut pro tribus habeat novem: quales integrum malum habet duodecim. Porro secundi pueri, qui duas partes tertias acceperat, seu duos trientes, singulas partes scindo in particulas quatuor: qui propterea pro binis habebit octonas; quales integrum malum habet duodenas. adeoque singulæ æquales sunt singulis particulis, quas primus puer ceperat. id est, quales novem particulas acceperat primus puer, tales octo accepit secundus. Similiter minimi pueri unam partem quartam in tres seco particulas; & unam partem tertiam, in quatuor. quæ additæ faciunt particulas 7. Porro 9 particulæ primi; 8, secundi; & 7, tertii, compositæ exhibent 24 particulas, in quot duo illa mala sunt divisa. Itaque plures quidem singuli partes accipiunt, sed minores: nec hilum amplius habent in posterioribus minutiis, $\frac{9}{12}$. $\frac{8}{12}$. $\frac{3}{12}$ & $\frac{4}{12}$. quàm in prioribus, $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$. Tot verbis rem non adeo obscuram declarare, non sine meo fastidio, volui, ut ad hujusmodi subtilitates clare inspiciendas te præpararem. Reductis igitur hoc modo ad eundem denominatorem minutiis, facilis est earum additio; scilicet additis numeratoribus, hîc 9 & 8, unde exurgunt 17; subscripto communi denominatore 12. sic, $\frac{17}{12}$. seu $1\frac{5}{12}$. & facilis quoque minoris à majore ablatio, nempe 8 à 9, unde 1 restat; subscripto communi denominatore 12, sic $\frac{1}{12}$. quæ pars duodecima est excessus, quo major minutia $\frac{3}{4}$ superat minorem $\frac{2}{3}$. Similiter minutiæ $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{2}$, reductæ ad eundem denominatorem, erunt $\frac{8}{6}$ & $\frac{9}{6}$, quæ compositæ faciunt minutiam $\frac{17}{6}$, seu 2 integra, & mi-

nutiam $\frac{7}{6}$. Verum si rationum magnitudo sit exploranda, illa major est, cujus termini longius inter se distant; quomodo ratio $\frac{9}{6}$ major est ratione $\frac{8}{6}$; quia inter 9 & 6 majus spatium est, nempe ternarii; quàm inter 8 & 6, nimirum binarii. Differentia autem illarum est ratio $\frac{9}{8}$, quæ in utriusq; rationis antecedentibus spectatur. Quod perinde fit, si earundem rationum $\frac{4}{3}$. $\frac{3}{2}$ communes facias antecedentes, ut $\frac{12}{9}$. $\frac{12}{8}$. ubi ratio $\frac{12}{8}$ rursus major est, quod ejus termini, 12 & 8, longius inter se absint, nimirum quaternario; quàm alterius rationis termini 12 & 9, nempe ternario; quæ propterea minor est. differentia autem iterum est ratio $\frac{9}{8}$. Eodem modo, rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$, ad eosdem consequentes terminos reductæ, sunt $\frac{4}{2}$. $\frac{3}{2}$. major quidem $\frac{4}{2}$, quia 4 longius abest à 2 quàm ab eodem 2 abest 3. estque excessus, quo major $\frac{4}{2}$ minorem $\frac{3}{2}$ superat, ratio $\frac{4}{3}$. Nec aliter, si easdem rationes $\frac{2}{1}$. $\frac{3}{2}$. ad communes antecedentes reducas, $\frac{6}{3}$. $\frac{6}{4}$. major est $\frac{6}{3}$. minor $\frac{6}{4}$. excessiva autem ratio, ut ante, $\frac{4}{3}$. Alia exempla sunt, rationes $\frac{9}{8}$. $\frac{10}{9}$ ad communes consequentes reductæ, $\frac{81}{72}$. $\frac{80}{72}$, quarum differentia est ratio, in qua comma Juniores constituunt, $\frac{81}{80}$. Sic rationes $\frac{10}{9}$. $\frac{11}{10}$ reductæ ad eosdem consequentes, sunt $\frac{100}{90}$. $\frac{99}{90}$. differentia autem $\frac{100}{99}$. Atque hic cognoscendæ rationum differentiæ modus idem est atque ille, qui vulgò adhibetur, rationem minorem à majore auferendo, quem deinde videbimus. Nunc alium tradam, quo rationum magnitudinem evidenter explorabimus. Scilicet minuta mensura adhibenda est, qua illas mensuremus. Hæc mensura, rationibus adplicanda, nonnisi ratio esse potest. Uti enim longitudines

menſuramus longitudinibus; ſuperficies, ſuperficiebus; corpora, corporibus; ſic rationes, rationibus. Ratio quippe rationem ſuperat, non numero, aut alia quacunque magnitudine, ſed ratione. Menſuram autem, vulgarem uſum ſecutus, adſumſi ſatis minutam, rationem $\frac{81}{80}$, quâ rationem $\frac{9}{8}$, in qua tonus major ſpectatur, ſuperare vidimus rationem $\frac{10}{9}$, in qua conſideratur tonus minor. quam exceſsivam rationem $\frac{81}{80}$, antiquo vocabulo, comma vocant. Intervalla igitur Harmonica, ſeu rationes, in quibus illa intervalla ſpectantur, & univerſim omnes rationes, ipſa menſurali ratione $\frac{81}{80}$ non minores, hac metimur. id eſt, exploramus, quoties hanc rationem $\frac{81}{80}$, ſeu comma, habeat ratio $\frac{2}{1}$ ſeu $\frac{80}{40}$. & $\frac{3}{2}$ ſeu $\frac{60}{40}$. & $\frac{9}{8}$ ſeu $\frac{81}{72}$. & $\frac{10}{9}$ ſeu $\frac{80}{72}$. & innumeræ aliæ. Unde perſpicuum eſt, minutam hanc menſuram, ſeu rationem $\frac{81}{80}$ aliquoties eſſe componendam, ſive addendam ſibi, ut compoſita ad propoſitæ rationis magnitudinem pertingat. Uti pannum decem ulnas longum menſuraturi, decies ulnam componimus, ut panni longitudinem adæquet. Hoc improbo labore in præcedenti tabula confecimus, ut centiesduodecies eadem menſura $\frac{81}{80}$ ſibi ſuperaddita, proxime, nondum tamen uno commate, ſuperaret rationem $\frac{4}{1}$, in qua dis diapaſon ſpectatur. Itaque inquiſiturus, quot commata, id eſt, quot rationes $\frac{81}{80}$, habeat ratio $\frac{9}{8}$, ſumo ex illa tabula novies compoſitum comma, his numeris $\frac{150094}{134217}$ comprehenſum; & facio, ut 150094 ad 134217, ſic 9 ad $8\frac{72}{1500}$. Sed $8\frac{72}{1500}$ minori ſpatio abeſt à 9, quàm 8 abeſt à 9. adeoque ratio $\frac{9}{8}$ major eſt ratione in numeris 9. $8\frac{72}{1500}$, id eſt, ratione $\frac{150094}{134217}$, ſeu, novem commatis, ſpectatâ. Quare novem

commata non explent rationem $\frac{9}{8}$. Rursus igitur ex tabula sumo commata decem, & facio, ut 121576 ad 107374, sic 9 ad $7\frac{115}{121}$. Sed $7\frac{115}{121}$ majori spatio abest à 9, quàm 8 abest à 9. adeoque ratio $\frac{9}{8}$ minor est ratione in numeris 9, $7\frac{115}{121}$, id est, ratione $\frac{121576}{107374}$, seu, X commatis, spectatâ. Quare X commata superant rationem $\frac{9}{8}$. Dico igitur, rationem $\frac{9}{8}$, in qua tonus major spectatur, minorem esse X commatis, majorem commatis IX. Eadem ratiocinatione invenimus rationem $\frac{2}{1}$ minorem 56, majorem 55 commatis: & ejus duplam $\frac{4}{1}$ minorem commatis 112, majorem 111. Sic reliquarum rationum magnitudinem investigamus. quarum aliquas præcedenti commatum tabulæ pag. 71 subjecimus. His præmissis ad rationum compositionem accedimus; quam Euclides tradidit definitione V libri VI. sed non sine obscuritate, quod vel commentaria in eam scripta docere possint. Cæterum Græca definitionis verba paullum variant, à diversis relata. Elementorum Græca editio sic habet: *Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινάς.* *Ratio ex rationibus composita dicitur, cum rationum quantitates multiplicata fecerint aliquas*, Bene, nisi quod in fine pro *τινὰς, aliquas* legendum censeo, *τινά.* Neque enim *πηλικότητας, quantitates*, facile supplebis; nequaquam certè *λόγους, rationes*, ut postea videbitur. Eutocius pag. 16. v. 32. rectè habet *τινὰ*, nempe *λόγον*. quod habet Scholiastes pag. 21. v. 33. quomodo etiam Commandinus in suo codice reperisse videtur, quem secutus est Clavius. Addit autem Eutocius, *ἐφ' ἑαυτὰς, in se ipsas* multiplicatæ; minus rectè pro *ἐπ' ἀλλήλας, inter se*

quomodo ipse recte loquitur pag. 19. v. 27. Et certe hujusmodi aliquid tamen erat addendum, ut de sensu melius constaret. Scholiastes ille, Theo Alexandrinus, pag. 24. v. 32. prima verba explicate profert: *Ratio ex duabus rationibus, vel etiam pluribus constare dicitur.* sed in fine inepta hæc est paraphrasis; *cum fecerint aliquam rationis quantitatem.* Simpliciter dicendum fuisset, *λόγον, rationem.* Porrò difficultas omnis est in vocabulo *πηλικότης, quantitas.* quo numerum significari putant, à quo proposita ratio denominatur. Sic duplæ rationis quantitas ipsis dicitur numerus duo, à quo illa nomen habet: triplæ rationis quantitas, ternarius. Atque hæc quantitas invenitur, divisâ propositæ rationis antecedente magnitudine per consequentem. ut rationis $\frac{3}{2}$ antecedens 3, per consequentem 2 divisa, exhibet ejus quantitatem $1\frac{1}{2}$. Sic rationis $\frac{4}{3}$ quantitas est $1\frac{1}{3}$. rationis $\frac{5}{6}$ quantitas, minutia $\frac{5}{6}$. rationis $\frac{8}{9}$, minutia $\frac{8}{9}$. Quod Eutocius & in hoc commentario docuit; & in altero, in XI propositionem lib. I. Conicorum Apollonii Pergæi. Et ante ipsum magni nominis Mathematicus, Nicomachus Gerasenus; & Heronas, commentario in Introductionem Arithmeticam. quæ duo scripta interciderunt. Deinde ita hoc explicant Scholiastes pag. 22. v. 2. Theo, pag 25. quorum omnium verba probe consideranda mihi commendabat Euthymius. Sed altius aliquanto jam penetremus, inquit, quomodo hoc vocabuli *πηλικότης* antiquis Mathematicis sit usurpatum. Antiquiores equidem Euclide laudare nequeo, qui in binis definitionibus id usurpavit. nempe in hac V. sexti, & in III libri V. quâ *Ratio* dici-

tur *duarum magnitudinum ejusdem generis*, κατὰ πηλικότητα; *ſecundum quantitatem*; vel, *in quantitate ſpectatarum, mutua quædam relatio*. Cauſam, cur hoc vocabuli Euclides addiderit, profert Scholiaſtes pag. 10. v. 22. *ut rationem ſepararet ab infinitis magnitudinibus. Quantitas enim terminus eſt continui quoti; & quotitas diſcreti. quippe diſcretum quotum non eſt magnitudo, ſed multitudo.* Quod quale ſit ſcholium, forſan non omnes æque vident. Itaque ex Nicomachi Arithmeticæ libro I. plenius id explicabimus, additis codicis noſtri MS. ſcholiis interlinearibus.

Τῶν τοίνυν ὄντων, τῶν τε κυρίως, καὶ τῶν καθ' ὁμωνυμίαν, ὅπερ ἐστι, νοητῶν τε καὶ αἰσθητῶν, τὰ μὲν ἐστιν ἡνωμένα καὶ ἀλληλουχούμενα· οἷον, ζῶον· δένδρον· κόσμος· καὶ τὰ ὅμοια. ἅπερ κυρίως (Editus codex addit, καὶ ἰδίως) καλεῖται μεγέθη. τὰ δὲ διῃρημένα τε καὶ ἐν παραθέσει (πλησίον κείμενα·) καὶ οἷον, κατὰ σωρείαν· ἃ καλεῖται πλήθη· οἷον, ποίμνη· δῆμος· χορὸς· σωρὸς· καὶ τὰ παραπλήσια. τῶν ἄρα δύο εἰδῶν τούτων, (τοῦ συνεχοῦς καὶ τοῦ διωρισμένου) ἐπιστήμην νοητέον (Editus, νομιστέον) τὴν σοφίαν. ἀλλ' ἐπειδὴ (Editus, ἐπεὶ) πᾶν πλῆθος, καὶ πᾶν μέγεθος, ἄπειρα τῇ ἑαυτῶν (Editus, αὐτῶν) φύσει ἐξ ἀνάγκης ἐστί· τὸ μὲν γὰρ πλῆθος, (τὸ διωρισμένον) ἀπὸ ὡρισμένης ῥίζης (τῆς μονάδος) ἀρξάμενον, οὐ παύεται προκόπτον· τὸ δὲ μέ-

Omnium quæ exiſtunt, tum propriè, tum ſecundum homonymiam; quod eſt, intelligibilium & ſenſibilium, alia ſunt unita & cohærentia; ut, animal, arbor, mundus, & ſimilia: quæ proprie (*& ſpeciatim*) vocantur magnitudines: alia ſunt diſterminata, & in adpoſitione (*prope ſe invicem poſita*) ſpectantur, & quaſi in cumulo, quæ vocantur multitudines; ut, grex, populus, chorus, acervus, & adſimilia. Sapientia igitur harum duarum ſpecierum (*continua magnitudinis & diſcreta*) ſcientia eſt cenſenda. Sed quoniam omnis multitudo, omniſque magnitudo, ſuâ naturâ neceſſario ſunt infinita: ſiquidem multitudo (*diſcreta magnitudo*) à terminata radice (*unitate*) incipiens non deſinit progredi; & magnitudo, à ter-

minato integro *(seu, quanto)* divisa, nullibi *(in infinitum enim dividitur)* sectionem sistere potest, sed in infinitum *(potentiâ)* per hanc sectionem progreditur: jam verò scientiæ omnino finitorum sunt scientiæ, non infinitorum. Ideo adparet, nec circa simpliciter magnitudinem, nec circa multitudinem simpliciter consistere posse scientiam. Indefinitum enim utrumque per se est: multitudo quidem, progrediens ad majus; magnitudo autem, ad minus. Sed circa aliquid ab utrisque separatum: *(finitum, terminatum,)* à multitudine quidem, circa quotum; *(magnitudinem discretam, seu, numerum,)* à magnitudine, circa quantum. *(seu, continuam.)*

γεθ☉, ἀπὸ ὡρισμένης ὁλότητ☉ (ἤγουν, τοῦ πηλίκου) διαιρούμενον, οὐδαμῇ (ἐπ' ἄπειρον γὰρ διαιρεῖται) δύναται παύειν τὴν τομήν· ἀλλ' ἐπ' ἄπειρον (τῇ δυνάμει) διὰ ταύτης (δι' αὐτῆς. *Editus malè*, διὰ ταῦτα) χωρεῖ. αἱ δ' ἐπιστῆμαι πάντως πεπερασμένων εἰσὶν ἐπιστῆμαι· ἀπείρων δὲ, οὐδέποτε. Φαίνεται δὴ, ὅτι οὐ (*Editus*, οὔτε) περὶ ἁπλῶς μέγεθ☉, οὔτε περὶ ἁπλῶς πλῆθ☉, συσταίη ἄν ποτε ἐπιστήμη. ἀόριστον γὰρ ἑκάτερον (*Editus malè addit*, καὶ) καθ' ἑαυτό ἐστι. πλῆθ☉ μὲν, ἐπὶ τὸ πλέον· (*Editus*, πλεῖον) μέγεθ☉ δὲ, ἐπὶ τὸ ἔλαττον. ἀλλὰ περί τι ἀπ' ἀμφοῖν ἀφωρισμένον. (ὡρισμένον, περατώμενον) ἀπὸ μὲν πλήθους, περὶ τὸ ποσόν· (τὸ διωρισμένον, ἤγουν, τὸν ἀριθμόν.) ἀπὸ δὲ μεγέθους, περὶ τὸ πηλίκον. (ἤγουν, τὸ συνεχές.)

Boëthius vertendo hæc ita suo modo collegit, vel potius disjecit, libro I. Arithmeticæ: *Horum igitur, id est, quæ sunt propriè, quæque suo nomine essentiæ nominantur, scientiam sapientia profitetur. Essentiæ autem geminæ partes sunt. Una continua, & suis partibus juncta, nec ullis finibus distributa; ut est arbor, lapis, & omnia mundi hujus corpora, quæ propriè magnitudines appellantur. Alia verò disjuncta à se, & determinata* (scribendum, *disterminata*, ut habeo in vetusto codice membranaceo) *partibus, & quasi acervatim in unum redacta concilium; ut grex, populus, chorus, acervus, &*

quicquid eorum (membranæ, *quicquid est.*) *quorum partes propriis extremitatibus terminantur, & ab alterius fine discreta sunt. His proprium nomen est multitudo.* Postea: *Illud quoque addendũ arbitror, quod cuncta vis multitudinis ab uno progressa termino, ad infinita progreßionis argumenta* (optimè membranæ, *augmenta*) *concrescit. Magnitudo verò, à finita inchoans quantitate, modum in divisione non recipit. Infinitißimas enim sui corporis suscipit sectiones. Hanc igitur natura infinitatem, indeterminatamque potentiam, Philosophia sponte repudiat. Nihil enim quod infinitum est, vel scientia potest colligi, vel mente comprehendi. Sed hinc sumsit sibi ipsa ratio, in quibus posset indagatricem veritatis exercere solertiam. Delegit enim de infinita multitudinis pluralitate, finita terminum quantitatis; & interminabilis magnitudinis sectione rejectà, definita sibi ad cognitionem spatia depoposcit.*

His, per se claris, adjungere possem Asclepium, insignem commentatorem in hanc Nicomachi Arithmeticam, quem M S. habeo. Paucula inde, quæ vocabulum πηλικότης explicant, delibabo.

Περί τι ἀφωρισμένον ποιεῖται τὴν ἐπισήμην ὁ μαθηματικὸς, ἀποκεκοφὼς ἀπ' ἀμφοτέρου, τοῦ τε πλήθους, καὶ τοῦ μεγέθους. ἀπὸ μὲν τοῦ πλήθους, περὶ τοσόνδε ποσὸν ποιεῖται τὴν ἐπισήμην. ἀποκόπτει γὰρ δέκα μονάδας, ἢ ιέ, ὁ μαθηματικὸς, καὶ περὶ μὲν αὐτὰς ποιεῖ τὴν ἐπισήμην. ἀπὸ δὲ μεγέθους, περὶ τοσόνδε πηλίκον, ἤτοι μέγεθος, ποιεῖται τὴν ἐπισήμην· ἀπο-

Circa determinatum aliquid facit scientiam Mathematicus, postquam abscidit ab utraque, (*specie quoti,*) nempe multitudine, & magnitudine: à multitudine quidem, circa tam magnum quotum facit scientiam. abscindit enim decem unitates, aut XV, Mathematicus, & circa illas facit scientiam; à magnitudine autem, circa tam magnum quantum,

ſeu magnitudinem, facit ſcientiam. abſcindit enim à magnitudine quinque aut decem cubitos, & circa illos facit ſcientiam. Quantitas autē, & quantum, eſt magnitudo continua.

κόπῃ γὰρ ἀπὸ τοῦ μεγέθους πέντε ἢ δέκα πήχεις, καὶ περὶ αὐτοὺς ποιεῖ τὴν ἐπιστήμην. ἡ δὲ πηλικότης, καὶ τὸ πηλίκον, μέγεθός ἐστι συνεχές.

Eadem ſignificatione & multis aliis hoc vocabuli eſt uſurpatum. Egregie Theo Smyrnæus. Τοῦ *μὲν ποσοῦ στοιχεῖον ἡ μονάς· τοῦ δὲ πηλίκου, στιγμή· λόγου δὲ καὶ ἀναλογίας, ἰσότης. οὔτε γὰρ μονάδα ἔτι διελεῖν ἐστιν εἰς τὸ ποσόν· οὔτε στιγμὴν, εἰς τὸ πηλίκον· οὔτε ἰσότητα, εἰς πλείους λόγους. Quoti elementum eſt unitas; quanti, punctus; rationis & proportionis, æqualitas. Neque enim unitas amplius dividi poteſt in quotum; neque punctus, in quantum; nec æqualitas, in plures rationes.* Idem: *μονάς ἐστι περαίνουσα ποσότης, ἀρχὴ καὶ στοιχεῖον τῶν ἀριθμῶν. Unitas eſt terminans quotitas, principium & elementum numerorum.* Significanter admodum Porphyrius, initio commentarii in XIII caput Harmonicorum Ptolemæi, explicans, quomodo ſpatiis inter ſonos interjectis, pro ipſis ſonorum rationibus uſus fuerit Ariſtoxenus, dicit quod ratio ipſi ſit, *δύο φθόγγων ἀνομοίων ἡ κατὰ πηλικότητα ποιὰ σχέσις. duorum ſonorum diſſimilium, ſecundum quantitatem certa quædam relatio.* Ex his veterum auctorum locis evidens eſt, quid ſit *ποσὸν, quotum*, & *ποσότης, quotitas*; item *πηλίκον, quantum*, & *πηλικότης, quantitas.* Jam videamus, quomodo in rationis definitione hoc vocabuli locum habeat. Duobus autem modis ibi uſurpari potuit. Vel enim, ut relationem illam duarum magnitudinum ſpectandam innueret in quoto continuo, ſeu quantitate, & magnitudine; non autem in quoto

discreto, seu quotitate, & multitudine. quorum alterutrum eum de magnitudinibus inter se comparatis statim quilibet cogitaturus esset, necessariò hîc erat definiendum. Quæ explicatio utcunque etiam est Scholiastæ pag. 12. Vel, ut significaret, infinitas magnitudines ab hac comparatione esse exclusas. quod priori Scholiastæ placet pag. 10. Ac si ita locutus fuisset Euclides: *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, quatenus finitæ sunt, mutua quædam relatio.* Quæ quidem vera est determinatio, sed ab Euclide hîc non attenta; verùm, ipsa magnitudinum adpellatione, supposita. Ideoque quales sunt magnitudines, nempe finitæ, talis etiam est illa relatio, finita & certa: & propterea πηλικότητι, certa & finita magnitudine minorem superat major. Quod si magnitudinibus hanc determinationem necessariò adjungendam censuisset, nihilominus his vocibus, κατὰ πηλικότητα, retentis, definitionem his verbis concepisset: λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν πεπερασμένων, ἡ κατὰ πηλ· *Ratio est duarum magnitudinum finitarum, secundum quantitatem.* quomodo Elementorum libri primi propositionibus I & X. εὐθεῖαν πεπερασμένην, *rectam finitam*, adsumsit. Quare vocabulum πηλικότης illo fine non adhibuit; sed alio, ne scilicet sinistrè in numero illa relatio spectaretur: ut factum ab Eutocio, Theone, & aliis. Universalior enim est ratio in quantitate spectata, eâ quæ spectatur in numero: quod non omnis ratio in quantitate spectata, numeris explicari possit. Deinde in eo graviter peccat, doctus alioqui Scholiastes, quod has voces, κατὰ πηλικότητα, *secundum quantitatem*, cum magnitudinum notione conjungendas

putat, cum Euclides ipſe relationis notioni illas adjunxerit: quod articulus ἡ in Græca definitione indicat. *λόγος ἐςὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.* Cæterùm ſuppoſuiſſe Euclidem, magnitudinum adpellatione finitas hîc intelligi, ex eo adparet, quod aliàs primæ definitioni libri V eodem modo hæc determinatio fuiſſet addenda, cum *pars* ipſi finitur, *magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum minor metitur majorem.* Quod idem dicendum de ſecunda definitione, quâ, quid multipla magnitudo ſit, explicavit. Itaque ſola prior explicatio vera exiſtit. Hoc enim voluit Euclides, ſecundum quantitatem capiendam eſſe hanc relationem, non autem, ſecundum quotitatem. ſeu, in quoto continuo, vel, ut ita cum vulgo loquar, in quantitate, ſeu magnitudine continua, ſpectari relationem illam; non autem in quoto diſcreto, ſeu numero. Ita enim quadrati diametrus ad latus rationem habet, aliæque numero ineffabiles magnitudines, ſi cum ejusdem generis magnitudinibus comparentur. Et hac de cauſa huic tertiæ definitioni ſtatim quartam ſubjunxit, quæ hoc melius explicaret; nempe, omnes ejusdem generis magnitudines rationem inter ſe habere, quæ, ſi multiplicentur, ſe invicem ſuperare poſsint. Si rationem in Arithmetica definire voluiſſet Euclides, ne quidem additurus fuiſſet, *κατὰ ποσότητα, ſecundum quotitatem,* duorum numerorum, aut etiam, numeratarum rerum, inter ſe relationem ſpectari: quod numerus cum numero comparari nequeat, niſi ſecundum numerum, quo major ſuperat minorem; vel contrà, minor à majore ſuperatur; vel etiam, alter alteri

eſt æqualis. Quoti enim ad aliud relati duæ ſunt ſummæ & generales diviſiones, æqualitas & inæqualitas. Itaque Nicomacho II libro Arithmeticæ Ratio finitur, *δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλας σχέσις. duorum terminorum* (duarum rerum numero finitarum) *inter ſe relatio.* Theoni Smyrnæo, cujus definitionem Arithmeticam ſuprà pag. 9. primo loco retuli; *δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν, duorum terminorum ejusdem generis:* determinatione adjectâ, ut ſint ejusdem generis. Porrò idem ferè fuiſſet, ſi pro *κατὰ πηλικότητα, ſecundum quantitatem*, dixiſſet, *κατὰ μέγεθος, ſecundum magnitudinem*, quod Scholiaſtes habet pag. 11. v. 22. niſi ad peculiarem vocabuli *πηλικότης* uſum reſpexiſſet. quem exemplo ſum illuſtraturus. Sint enim in ſchemate pag. 42. duæ lineæ BF, FA. quarum major BF referatur ad minorem FA. Sunt itaque finitæ. Si enim vel utraque, vel alterutra infinita eſſet, neutra ad alteram referri poſſet. Itaque ſuppoſita illa determinatione, generaliter quæro *πόσῳ, quoto,* ſeu, quotâ parte minoris AF, major FB illam minorem ſuperet. Reſpondere poſſum, *τοσῷδε πηλίκῳ, tanto quanto,* demonſtrativè; vel, quod commenſurabiles ſint magnitudines, *τοσῷδε ποσῷ, tanto quoto.* Nempe cum BF talium ſit IX partium, qualium FA, VI; major BF ſuperat minorem FA, *ποσότητι, quotitate* III. adeoque etiam *πηλικότητι, certa magnitudine,* exempli gratia, FN. Sint rurſus in eodem ſchemate duæ lineæ, AB, BF. Quæro, *πόσῳ,* quotâ parte minoris FB, major BA illam minorem FB ſuperet. Non poſſum dicere, *τοσῷδε ποσῷ,* quod ratio lineæ AB ad lineam BF ſit ineffabilis, ſeu, numero inexplicabilis. recte autem

dicam, τοσῷδε πηλίκῳ, tanta quantitate, exempli gratiâ, F N. ſeu, ut cum Euclide loquar, κατὰ πηλικότητα F N. Quare τὸ quantum ſemper exhibere poſſumus; quotum autem, non niſi cum rationis magnitudines ſunt commenſurabiles. Cæterum generale eſſe vocabulum τὸ ποσὸν, quod & magnitudinem, & multitudinem comprehendat, diſcimus ex Scholiaſte pag. 10. v. 24. & ex Aſclepio, multis locis. Sextus Empiricus πρὸς μαθηματικοὺς quarto libro eodem uſu accepit. Ἐπειδὴ τοῦ ποσοῦ τὸ μέν ἐστιν ἐν τοῖς συνεχέσι σώμασιν, ὃ δὴ μέγεθος καλεῖται, περὶ ὃ ἐστι μάλιστα ἡ γεωμετρία. τὸ δὲ ἐν διεστῶσιν, ὅπερ ἀριθμὸς καθέστηκε, περὶ ὃν ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται. *Quoniam quoti aliud eſt in corporibus continuis, quod magnitudo vocatur, circa quem in primis verſatur Geometria; aliud in diſcretis, quod numerus exiſtit, circa quem Arithmetica occupatur.* Latinus ſermo adeo propriè hæc vocabula exprimere nequit. Rectius forſan τὸ ποσὸν verteretur *aliquotum*; quia πόσον eſt *quotum*. cæterorum interpretationem haud facile meliorem reddemus. Ex iis autem quæ hactenus diſſerui, liquere poteſt, ex interpretibus nullum, quid πηλικότης eſſet, percepiſſe. Federicus Commandinus, limati judicii mathematicus, vertit; *quatenus ad quantitatem pertinet.* perperam; ſed cum pejore adhuc explicatione: *Vide ne hoc potius dictum ſit, ut intelligatur proportio, quæ in quantitate; non item ea, quæ in æſtimatione conſiſtit.* Hunc autem ſcrupulum ipſi injeciſſe videri poſſit ſcholium, quod in Græca editione ante V librum legitur. cujus hæc ſunt verba: ἀλλ' εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ ποσόν. διττὸς γὰρ ὁ λόγος· ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ, ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδέν ἐστιν εἶδος (le-

gendum ὄφελος. aut addendum *χρήσιμον*, post vocem *χρεῖαν.) πρὸς τὴν παροῦσαν χρεῖαν· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶ ε΄. Sed hac (rationis ratio) sub quotum cadit. Duplex enim ratio est: alia in æstimatione; alia in quoto spectata. Et quidem rationis in æstimatione spectata nullus in hac contemplatione usus: alterius autem, in quoto, quinque sunt species.* Ista ergo explicatio admodum mihi videtur inepta. Quid enim? in Mathematicis, cum tam multa de magnitudine docuisset Euclides, putandus ne est ad hanc relationem secundum æstimium, quæ incerta est, &, ut ita dicam, infinita, definiendo respexisse? Nec magis hoc verum est, si vel primo loco hic quintus liber fuisset positus. quippe jam, quid pars esset, definierat, & quid multiplum. Hunc secutus Clavius, *secundum quantitatem* explicat, *secundum quod una major est quàm altera; vel, minor; vel, æqualis.* Quod æque verum esset, si pro *κατὰ πηλικότητα*, Euclides dixisset, *κατὰ ποσότητα.* Quinimò si plane hæc verba omisisset, ut Arithmeticis factũ superius vidimus, nihilominus hæc consideratio locum habuisset. Nec egregium illud scholium, pagina 12 adpositũ, Commandinus intellexit, ut ex ipsius versione liquet, & hoc adjuncto commentario: *Hoc idcirco dictum videtur, ut infinitæ magnitudines à proportionibus excludantur. finita enim magnitudo quantumlibet multiplicata tantum abest ut infinitam magnitudinem exuperet, ut ne æquare quidem possit unquam.* Quæ quidem omnes hallucinationes inde propullularunt, quod vim vocabuli *πηλικότης* interpretes ignorarent. Videamus nunc, quid ad alteram definitionem explicandam hoc vocabuli, recte acceptum, conferre pos-

ſit. Eucl. Hæc non ſine admiratione quadam, Hermotime, te narrantem audio. Haud putaſſem, tantùm obſcuritatis interpretibus præbiturum fuiſſe vocabulum πηλικότης. quod ſane eo ſenſu, quo recte explicavit Euthymius, ab omni antiquitate eſt uſurpatum. Nimirum ex Græcæ litteraturæ, in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura quid non ubique errorum eſt enatum? Hermot. Majore cum admiratione me de altera definitione differentem audies. Nam & clari mathematici, & Græci, reprehenſionem incurrent. quorum duos, ne ignotos accerſam, & obſcuros, hîc præſentes vides; Eutocium dico, & Theonem. Diſerte enim uterque per rationis *πηλικότητα, quantitatem,* te intelligere dicit *ποσότητα, quotitatem,* ſeu, ut ipſi loquuntur, numerum denominatorem, à quo ratio denominatur. quod quale ſit, ſuperius narravi. Nempe, cum dico, ratio dupla, numerum duo nomino, à quo hæc ratio nomen habet: qui numerus duo, eſt quantitas ſeu magnitudo rationis duplæ. Sic triplæ rationis quantitas eſt numerus ternarius; à quo illa denominatur: ſextuplæ rationis, numerus ſex: ſupernonæ rationis $\frac{10}{9}$ quantitas eſt $1\frac{1}{9}$: ſuperoctogeſimæ, $1\frac{1}{80}$. Eucl. Hoc equidem mihi perſuadere nequeo, adeo inconſideratum fuiſſe noſtrum Eutocium, virum eximium, quem omnes ex editis in libros divini noſtri Archimedis commentariis *μαθηματικώτατον* judicant. Eutoc. Nunquam crediſiſſem, ô Euclide, tam facile, non dicam, novis dogmatis te capi potuiſſe, ſed verbis, quæ nobis facere videtur hic Hermotimus. Quamvis non poſſim non adſentire iis, quæ de vocabulo πηλικότης expli-

cavit. Hæc enim clarorum mathematicorum auctoritate ſunt roborata. Sed quid dices, ſi non tantùm ex tuæ definitionis verbis hoc me collegiſſe oſtendam, ſed etiam demonſtratione hanc explicationem confirmaſſe. Cum propoſitarum rationum quantitates in ſeipſas multiplicantur, inde fieri inquis rationem. Per πηλικότητα, quantitatem cujusque rationis, vel intelligis illius rationis magnitudinem, quæ in duorum terminorum, vel continuorum, vel diſcretorum, relatione ſpectatur; ſecundum quam magnitudinem una ratio alterâ major minorve cenſetur; vel etiam, ipſas magnitudines, ſeu terminos, qui rationem conſtituunt, & quaſi comprehendunt. Poſterius intelligere nequis. Neque enim rationis alicujus termini, inter ſe multiplicati, alterius rationis, cum qua illa comparabitur, vel antecedentem terminum, vel conſequentem conſtituent. quod exemplis probabo. Sint enim duæ rationes, ſeſquialtera $\frac{3}{2}$. & ſuperquàrta $\frac{5}{4}$. quarum terminos, ſeu quantitates, nempe rationis ſeſquialteræ, 3 & 2, *in ſeipſas*, ἐφ' ἑαυτάς, ita enim loqui amas, vel potius, ἐπ' ἀλλήλας, *inter ſe* multiplicatæ, faciant 6. item rationis ſuperquartæ quantitates, 5 & 4, inter ſe multiplicatæ faciant 20. Nequaquam, ſcio, dices, rationem $\frac{6}{20}$ ſeu $\frac{3}{10}$. aut, ſi majorem numerum antecedere velis, $\frac{10}{3}$. compoſitam eſſe ex duabus rationibus, $\frac{3}{2}$ & $\frac{5}{4}$. Quamvis in innumeris exemplis id ſit verum. Sic enim multiplicati rationum $\frac{2}{1}$. $\frac{3}{2}$ termini compoſitam ex ipſis rationem facient $\frac{6}{2}$ ſeu $\frac{3}{1}$. & $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ rationem $\frac{12}{6}$. & $\frac{9}{8}$. $\frac{10}{9}$ rationem $\frac{90}{72}$, ſeu $\frac{10}{8}$, ſeu $\frac{5}{4}$. quoniam in his exemplis tres numeri immediate ſe ſequentes, rationes duas con-

ſtituunt : adeoque, ſi duo extremi, rationem exhibentes, eodem numero intermedio multiplicentur, ratio illa variari nequit. Hermot. Optime hoc, Eutoci ; & plane ex Euthymii ſententia. Inſulſa eſſet illa rationum compoſitio. Attamen nec priorem tuam ſententiam ullo modo veram cenſet. Cauſam jam dixi, quod πηλικότητας *quantitates*, velis eſſe ποσότητας, *quotitates*. Atqui πηλικότητας, quantitates rationum inter ſe multiplicandas dicit Euclides; non ποσότητας, numeros hujusmodi, quibus rationum effabilium antecedentes, ad unitatem, tanquam communem conſequentem, relatæ explicentur. quod hoc modo rationes numero ineffabiles componi nequeant. Sed & ipſe ; quod notandum dicebat Euthymius ; de hac tua explicatione, quam aliorum mathematicorum auctoritate ſeductus, obtinere petis, dubitas, cum in ſcholio in XI propoſitionem libri I. Conic. Apollonii, ἀῤῥήτων, magnitudinum numeris ineffabilium mentionem facis, quas ſecundum hanc explicationem componi poſſe recte negabis. Componi autem poſſe docebit te deinde Euthymius. *Per quantitatem*, inquis, Commandino interprete, *intelligendo numerum, à quo proportio ipſa denominatur. In multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer ; in reliquis verò habitudinibus neceſſe eſt quantitatem numerum eſſe, & partem, ſeu partes. niſi forte quiſpiam velit etiam ἀῤῥήτους, videlicet quæ exprimi non poſſunt, habitudines eſſe, quales ſunt magnitudinum irrationalium.* Eucl. Recte hoc ultimum addis, Hermotime. Non vidére illi, me vocabulo πηλικότης reſpexiſſe etiam ad numeris ineffabiles rationes, quas componere Geometra

poteſt, aut illarum minorem à majore auferre. HERMOT. Contrà cenſet Eutocius, qui rationum compoſitionem Arithmeticæ conſiderationis eſſe ſtatuit, & primò numeris, deinde per numeros etiam magnitudinibus ineſſe dicit. Verba ex illo in Apollonium ſcholio proferam: *Non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quod rationum compoſitio ex arithmeticis demonſtretur. Antiqui enim hujusmodi demonſtrationibus ſæpe uti conſueverunt; quæ tamen mathematicæ potius ſunt quàm arithmeticæ, propter analogias. Adde quod quæſitum Arithmeticum eſt. nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, ſecundo loco per numeros & magnitudinibus inſunt.* Ad hæc, inquiebat Euthymius, multis diſputare nolo. quippe ad illam quæſtionem devenietur, utra harum ſcientiarum naturâ prior ſit; Arithmetica, an Geometria. Sed in noſtra diſputatione illud quæritur, in quanam harum ſcientiarum generalius ratio ſpectetur, utrum in Geometria, an in Arithmetica. In Geometria dicit cum Euclide, & procul dubio etiam cum divino Archimede, Euthymius. ARCHIM. Attente Hermotimum, Euthymii ſui dogmata narrantem, audio, quem commodiorem hactenus, ô Euclide, inveniſti quàm putaras. Illa ipſius explicatio vocabuli *πηλικότης* in tua rationis definitione eſt veriſsima. Eandem illius vocabuli ſignificationem, & uſum, in definitione rationum compoſitionis ſumma cum ratione admittendam ſtatuit. Ut autem ibi duobus modis hoc vocabuli acceptum diſſeruit; ita etiam in hac definitione duabus ſententiis, ex diverſa hujus vocabuli acceptione, variatur. quarum illa, quam Euthymius profert,

nempe *πηλικότητας, quantitates* te dixiſſe, ut ſignificares, etiam numeris ineffabiles magnitudines rationem habere, & hujusmodi rationes componi poſſe, noſtra eſt, & veterum omnium ſententia, adeoque veriſsima. HERMOT. Exploſâ itaq; Eutocii, & reliquorum, ſententiâ, de quantitate rationis numero exhibendâ, altera non minor difficultas ventilanda reſtat; utrum per *πηλικότητας, quantitates*, in hac definitione, ipſæ rationum magnitudines, antecedentes & conſequentes, intelligendæ ſint; an verò rationum quantitates; quæ in antecedentium ad conſequentes relatione ſpectantur; non quidem numeris, ſed magnitudinibus, exhibitæ. Utraque ſententia ſuas cauſas habet, quas ordine pandam. Sed prius, inquiebat Euthymius, quomodo rationes, numeris exhibitæ, componantur, tibi explicabo. Sint duæ rationes, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, quas componere, ſeu addere, velis. Antecedentes igitur harum duarum rationum, 3 & 4, inter ſe multiplicabis; fiunt 12. & item conſequentes, 2 & 3; fiunt 6. Hi duo facti numeri; nempe antecedens 12, factus ex duobus antecedentibus; & conſequens 6, factus ex duobus conſequentibus; rationem conſtituunt duplam $\frac{12}{6}$, ſeu in minimis terminis $\frac{2}{1}$; compoſitam ex duabus rationibus, nempe ſeſquialtera $\frac{3}{2}$, & ſupertertia $\frac{4}{3}$. quod ſic planum fiet. Multiplicetur decuſſatim, *χιαστικῶς*, vel prioris rationis antecedens in poſterioris conſequentem, ut fiat 9; vel prioris rationis conſequens in poſterioris antecedentem, ut fiat 8. Si enim alterutrum numerum; vel 9, vel 8; medio inter 12 & 6 loco collocaris, videbis rationes duas, $\frac{12}{9}.\frac{9}{6}.$ vel $\frac{12}{8}.\frac{8}{6}$, prioribus duabus $\frac{3}{2}.\frac{4}{3}$ æquales. Sic $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$ compoſitæ, fa-

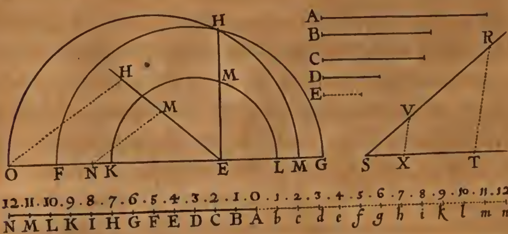
ciunt rationem $\frac{6}{2}$ seu $\frac{3}{1}$. multiplicatis inter se rationum harum antecedentibus, 2 & 3; & consequentibus, 1 & 2. Item $\frac{2}{1}$ & $\frac{2}{1}$ compositæ; id est, $\frac{2}{1}$ duplicata; faciunt $\frac{4}{1}$. & ratio $\frac{3}{1}$ duplicata facit rationem $\frac{9}{1}$. Quod si minorem rationem â majore auferre velis, primum explorandum tibi, utra propositarum rationum sit minor. quod fit reductis rationibus ad communem terminum; vel antecedentem, vel consequentem; ut supra pagina 76 vidimus. Ita enim ad communem consequentem reductæ rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, erunt $\frac{9}{6}$ & $\frac{8}{6}$. Major $\frac{9}{6}$; minor $\frac{8}{6}$, ob caussam ibi dictam. Excessus autem, quo major ratio $\frac{9}{6}$ minorem $\frac{8}{6}$ superat, est ratio $\frac{9}{8}$. Similiter rationes, $\frac{3}{1}$ & $\frac{4}{3}$, reductæ ad communem, exempli causâ, antecedentem, erunt $\frac{12}{4}$ & $\frac{12}{9}$. quarum major $\frac{12}{4}$ superat minorem $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{4}$. quod si ad communem consequentem illas reduxeris, $\frac{9}{3}$. $\frac{4}{3}$, eandem excessivam rationem $\frac{9}{4}$ habebis. Idem vulgari operatione consequéris. Alterutrius enim propositarum duarum rationum termini invertantur; deinde antecedentes inter se multiplicentur, & item consequentes. si insuper decussatim multiplicaveris, habebis communem terminum, medio loco collocandum, ad quem extremi relati, majorem rationem & minorem indicant. Secundum hanc operationem rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$ sic collocatæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{3}$, dabunt hos tres terminos, 8.6.9. quorum extremi 8 & 9, rationem excessivam constituunt: medius autem communis est, ad quem utriusque rationis $\frac{8}{6}$ & $\frac{9}{6}$ quantitas expenditur. Si posterioris rationis in hoc exemplo terminos invertas, $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{4}$ operatione factâ hos habebis terminos, 9.12.8. in quibus idem perspicitur. Jam

ad propositum revertamur. Si igitur per πηλικότηλας; *quantitates* intelligi Euclides voluisset ipsas rationum magnitudines, antecedentes & consequentes; quales sunt termini, 3 & 2, rationis $\frac{3}{2}$. item 4 & 3, rationis $\frac{4}{3}$. aliter locuturus fuisset; certe loqui debuisset. hoc nempe modo: λόγ☉ ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότηλες ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, αἱ μὲν ἡγέμεναι ἐπὶ τὰς ἡγεμένας· αἱ δὲ ἑπόμεναι ἐπὶ τὰς ἑπομένας, ποιῶσί τινα λόγον. *Ratio ex rationibus composita dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ: antecedentes quidem in antecedentes; consequentes autem in consequentes: fecerint aliquam rationem.* Eutoc. Imò verò his verbis illam definitionem concepisset: ὅταν τὰ τῶν λόγων ἡγέμενα ἐπ' ἄλληλα πολλαπλασιασθένlα, ποιῶσιν ἡγέμενον· καὶ ὁμοίως τὰ ἑπόμενα, ἑπόμενον. *cum rationum antecedentes (magnitudines) inter se multiplicata, fecerint antecedentem; & similiter consequentes, consequentem.* Nam quid ἡγέμενον μέγεθ☉ καὶ ἑπόμενον, antecedens magnitudo esset, & quid consequens, jam quinto libro definierat. Hermot. Acutè hoc mones. Attamen magis Euclidi placuit vocabulum πηλικότης. pro quo, ut supra monui, pagina 86. in rationis definitione usurpare potuisset vocabulum μέγεθ☉. nisi Pythagoricos secutus, omnis mathesios parentes; quorum inter τὸ ποσὸν, *quotum*, & τὸ πηλίκον, *quantum*, distinctiones paulo ante retuli; solemnia illorum vocabula potius adhibenda censuisset. Istud autem ἐφ' ἑαυlὰς, *in se ipsas*, quod & tuo, Eutoci, tempore in hac definitione lectum fuit, pro quo ἐπ' ἀλλήλας reponendum monui, ab insulsis librariis, & παραδιορθωlαῖς, mutatum

censet. Porro si alteram sententiam sequamur, quæ majorem in re, quam in verbis difficultatem parit, ita loqui potuisset: *λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιασθεῖσαι, (ἤγουν, ἀλλήλας πολλαπλασιάσασαι,) ποιῶσί τινα πηλικότητα λόγου.* *Ratio ex rationibus constare dicitur, cum rationum illarum quantitates inter se multiplicatæ* (seu *postquam se invicem multiplicaverint,*) *fecerint aliquam rationis quantitatem.* In ipsa re dixi majorem esse difficultatem, quod hac multiplicatione quantitatum, tantùm unam quantitatem, seu terminum antecedentem nanciscamur, adeoque non rationem; quod erat propositum. quippe non terminus ex rationibus componi dicebatur, sed ratio. Hanc tamen sententiam insigni quadam interpretatione se juvare posse dicebat Euthymius; nempe, ut dicamus, consequentem rationis terminum ubique esse unitatem. Quod etiam adparet ex ipsis rationum nominibus, quæ illarum quantitatem, secundum Eutocii, & Arithmeticorum sententiam, exprimunt; cum tantùm antecedentem rationis effabilis terminum nominent, cujus consequens est unitas. Hoc in multiplis rationibus est evidens; ut in dupla, denominator est duo, terminus antecedens rationis duplæ, cujus consequens est unitas. Sic triplæ rationis denominator & antecedens est 3. octuplæ, 8. In superparticularibus denominator ille est unitas & particula; in sesquialtera, unitas & semis, $1\frac{1}{2}$; in supertertia, $1\frac{1}{3}$; in superquarta, $1\frac{1}{4}$; in superquintadecima, $1\frac{1}{15}$. quæ omnes communem habent consequentem, unitatem. Superpertes nomen habent ab unitate & aliquot partibus, tanquam

antecedente termino, ſimiliter ad unitatem, tanquam omnium rationum communem conſequentem, relato. Et quidem ſi partes illæ ſint duæ tertiæ, ratio ſuperbitertia dicitur; ab antecedente $1\frac{2}{3}$: ſi tres quartæ, ſupertriquarta, ab antecedente $1\frac{3}{4}$. Hic autem antecedens in numeris invenitur, diviſo antecedente propoſitæ rationis termino per ejus conſequentem: adeoque eſt, ut propoſitæ rationis conſequens ad ſuum antecedentem, ita unitas, tanquam conſequens, ad hunc novum antecedentem. exempli gratia, ut 2. 3 : 1. $1\frac{1}{2}$. & hoc eſt, quod tu, Eutoci, de rationum compoſitione demonſtraſti. Eutoc. Hæc confirmandæ meæ ſententiæ faciunt. Hermot. Si quoque de conſequente rationis termino, ſeu unitate, mentionem injeciſſes. Ita enim denominatores tuos conſideras, ac ſi uno illo antecedente termino, rationis quantitas eſſentialis exprimatur. quod plane impoſsibile dicit Euthymius. Nec Euclidem puto huic poſteriori explicationi definitionis ſuæ adſenſurum. Eucl. Prima explicatio mentem meam, quam definiendo expreſſeram, interpretatur; quamvis ingenioſa quoque ſit poſterior. ſed illam incommoda non pauca ſecum trahere video. Illud ſane me maxime adfligit, tantum errorum ſuccreviſſe ex meis definitionibus, quarum ſenſum partim non perceperunt viri eximii, partim ſupini librarii corruperunt. Hermot. Præterea, quod toties dixi, numeris ineffabiles rationes hæc doctrina de denominatoribus non comprehendit. quod maximum eſt in Eutocii interpretatione erratum. Illas autem, quibuscunque irrationalibus lineis exhibitas, ita componemus.

Sint duæ rationes ineffabiles, A, B : C, D. quas componere, ſeu addere, velim. Ducatur linea infinita, FG. & à quovis in ea puncto E ponatur linea E F, æqualis ipſi A; & ab altera parte puncti E, linea E G,



æqualis ipſi C. Deinde ſupra diametrum F G deſcribatur ſemicirculus. & à puncto E erigatur perpendicularis EH. Rurſus in linea FG infinita, ſumatur ab una parte EK, æqualis ipſi B; & ab altera parte EL, æqualis ipſi D. & ſupra diametrum KL deſcribatur ſemicirculus, perpendicularem HE ſecans in M. Poſtea fiat, ut ME ad EH, ſeu EN ipſi æqualem, ſic HE ad EO. Dico rationem OE ad EM, compoſitam eſſe ex duabus rationibus A, B; C, D. Cujus demonſtratio ex Euclidis Elementis eſt manifeſta. Cum enim rectangulo ab A, C; hoc eſt, F E, E G; æquale ſit quadragulo ab HE: item rectangulo à B, D; hoc eſt, KE, E L, æquale ſit quadratum ab ME; & æquangula rectangula rationem inter ſe habeant ex lateribus compoſitam: erit ratio quadrati ab H E, ad quadratum ab EM, compoſita ex ratione A ad B, & ratione C ad D.

Rationis autem quadratorum ab HE & EM dimidia eſt ratio laterum HE, EM. & hujus rationis dupla, ex conſtructione, ratio OE ad EM. quod monſtrare oportebat. Harum autem rationum magnitudines ſecundum hos numeros adſumſit. A media & irrationalis, æqualis eſt lateri lateris quadrati; ſeu, ut loquuntur, radici radicis ex *6912*. B, eſt partium *6*. C, radix ex 32. D, radix ex 10. Eucl. Optime hoc, Hermotime, & plane ad noſtram mentem. Sic antiqui rationes compoſuerunt, poſitione datas, & numeris ineffabiles. Hermot. Non intellexére igitur propoſitionem XXIII ſexti elementi, qua definitionis illius de rationum compoſitione exemplum demonſtraſti. Hæc autem omnia, quæ vobis narro de rationum compoſitione, & de verbis, quibus illa eſt tradita, nunquam, inquiebat Euthymius, ſe moturum fuiſſe, niſi falſiſsimum dogma, & quod maximam errandi anſam aliis præbuit, inde fuiſſet fabricatum. Hac enim denominatorum inter ſe multiplicatione fultus hic Theo Alexandrinus, geometra alioqui eximius, quod ex Commentariis in Ptolemæi Magnam Conſtructionem videre eſt, adſeruit, triplæ rationis duplam eſſe ſextuplam. Verba ejus ſuprà, paginâ 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. propoſui; quæ ex Commentariorum libro primo, vulgatæ editionis pag. 62, ſunt deſumpta. Hunc ſecuti recentiores, volumina ſua his paralogiſmis impleverunt. Elementa quoque tua, Euclide, ad quæ fuſe hoc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſunt coacta. Eucl. Hac narratione percellor, nec, quid dicam, habeo. An Theo, noſter Theo, dixit, rationem

ſextuplam eſſe duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore ſine ratione mathematici conſideraruntʔ nec Græca verba tum homines intellexerunt, quibus quæ ratio alterius eſſet dupla, quæ tripla, & quadrupla; quæ ſeſquialtera eſſet ratio alterius rationis, & ſupertertia, & ſuperquarta, &, ut verbo dicam, quacunque poſsibili ratione alteram ſuperans, aut ab illa deficiens? THEO. Certe cum ratione hoc adfirmaſſe videbor, ſi demonſtratio mea inſpiciatur, & rerum natura, ex qua exempla, ad amuſsim quadrantia, depromere poſſum. HERMOT. Hoc poſtea videbimus. Hunc verò errorem ampliavit Gregorius à S.to Vincentio, qui grande illud opus Geometricum, de Quadratura Circuli, ante ſeptem annos edidit, ſi effectum ſpectemus, conatu ſolo laudabile. Hic, ut ſcopum feriret, de rationum proportionibus, ſeu, ut ipſe cum Boëthio vocat, Proportionalitatibus Geometricis, protulit nova inventa; revera autem multa nova errata. Namque in ſolo octavo libro, qui hujus doctrinæ fundamenta continet, centum ſeptendecim falſas propoſitiones numeravit Euthymius: tot nimirum, quot Euclidéis fundamentis carent. APOLLON. Hîc magnam tempeſtatem ſurgere video. Revera mira mihi accidunt, quæ hic narrat Hermotimus; cum ab illo tempore, quo hac quiete mihi frui licuit, nullum hujusmodi evidentibus erroribus circumventum audiverim, cujusmodi, florentibus adhuc literarum ſtudiis, & Græca humanitate, eximios viros abactos dicit. ARCHIM. Et me, fateor, hæc turbant. Si enim Euclidis elementis, facilibus, & extra errandi aleam, ut nobis ſemper viſum

eſt, poſitis, iſthuc accidit, quid de meis ſcriptis, eorumque interpretatione, factum putabo? Illis enim, tanquam firmiſsimis fundamentis ſuperſtruens, in demonſtranda octava propoſitione libri ſecundi de Sphæra & Cylindro, rationem $\frac{27}{8}$ dixi ἡμιόλιον, ſeſquialteram rationis $\frac{18}{8}$ ſeu $\frac{9}{4}$. & rationem $\frac{9}{4}$ eſſe διπλασίονα, duplam rationis $\frac{9}{6}$ ſeu $\frac{3}{2}$. Quî aliter loqui potui; quî aliter ratiocinari? HERMOT. Eadem ſolidâ explicatione confirmavit tuus Eutocius. Sed, ut vides, nec Theo hoc intellexit, nec ex poſterioribus mathematicis, ad noſtra uſque tempora, ullus. Illos autem errores, ut dicere ſolet Euthymius, ob neglectum Muſices ſtudium, quæ in rerum omnium rationibus ac proportionibus inveſtigandis occupatur, mathematicis Deus immiſit; uti olim Deliis Apollo peſtem, quod Geometriæ, quæ in rationibus ac proportionibus demonſtrandis verſatur, nullam illi operam darent. Hoc ex propoſito iis problemate de cubi duplicatione liquet, cujus perficiendæ nullam aliam viam reperiemus, quam quæ, inventis inter rectas duas lineas, quarum major minoris dupla eſt, duabus mediis proportionalibus, ſolerter ab Hippocrate Chio eſt excogitata. In naturalibus autem vix ulla evidentiora exempla reperiemus omnium quæ in rationum doctrina diſquiruntur, quam quæ Muſica ſuppeditat. Sed noſtro tempore ſi quis Muſica cognoſcere deſideret, fundamentis illorum neglectis, ad ipſam praxin feſtinat, quam ſine cauſa & demonſtratione addiſcit. Itaque in millenis hujuſmodi muſicis vix unus canonicus invenietur, cum olim omnes Pythagorici eſſent canonici, & in canonis ſectione præcipuum ſtudium

collocarent. Cæterum multa hîc movenda dicebat Euthymius, antequam ſolide ad Theonis argumenta, & Vincentii omnes falſas propoſitiones, reſpondere poſsimus. Hæc vobis ediſſerere conabor, ſed ea lege, ut ſilentium plane Pythagoricum ſervetis. EUCL. Servabimus, modo paralogiſmis nullis tua intricaveris. HERMOT. Evidentiſsimis exemplis, & ex media turba petitis ea ſum illuſtraturus, quæ rerum naturam preſſo veſtigio ſequendo in rationum Geometricarum doctrina primus, omnis antiquitatis, & veſtra poſtea, uti ſpero, confeſsione, invenit Euthymius. Fingamus itaque lineam Nn (in diagrammate pag.98.) eſſe terræ diametrum, cujus centrum, A. quatuor autem homines, Septimium, Octavium; Nonium, Decium, in A, tanquam terræ centro, conſiſtere; quorum bini, Septimius & Octavius, ad nos evadere conentur per radium AN; reliqui bini, Nonius & Decius contrà, ad noſtros antipodas, per radium An. Ponamus primum, omnes æquali celeritate ad ſuperas auras tendere. Quare quo temporis ſpatio, ex eodem loco A, ruditer loquendo, iter ingredientes Septimius & Octavius veniunt in B; Nonius & Decius, in alteram verſi partem, perveniunt in b: & cum Septimius & Octavius veniunt in C; Nonius & Decius veniunt in c: bini ac bini, æquali celeritate iter accelerantes, donec eodem tempore omnes, ad ſuperas auras evadant; ſed in diverſas partes, nempe Septimius & Octavius, ad nos; Nonius & Decius, ad noſtros antipodas. Itaque Septimii celeritas ad celeritatem Octavii eſt in ratione nulla, ſeu nihili; quia cum Septimius unum milliare confecit,

etiam Octavius, ejus comes, confecit iſtud milliare unum: quare iter unius ad alterius eſt, ut 1 ad 1. Et cum Septimius duo milliaria confecit, etiam Octavius eadem duo milliaria eſt emenſus, quæ inter ſe ſunt, ut 2 ad 2. & porro progrediendo, ut 3 ad 3. ut 8 ad 8. ut 100 ad 100. Cum itaque nulla inter Septimium & Octavium in emenſo itinere ſit diſtantia, æqualem rationem, quam nihili ſeu nullam Euthymius vocat, in ipſorum celeritate ſpectamus. Omnes autem nihili rationes, uti ſunt $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{8}{8}, \frac{10}{20}, \frac{100}{100}$. inter ſe ſunt æquales. quemadmodum in Logiſtica omnes notæ nullæ, 0, 0, 0 inter ſe, tanquam nihili res, æquales exiſtunt. Similiter de Nonio & Decio, in alteram partem tendentibus, ratiocinabimur. Rurſus ponamus ſeptem homines, Mævium, Septimium, Octavium, Sempronium, Nonium, Decium, Sejum, in terræ centro A conſiſtere, quorum medius, Sempronius, in centro A immotus maneat: quatuor autem æquis paſſibus iter accelerent; bini ac bini: Septimius & Octavius, ad nos tendendo; Nonius & Decius, ad noſtros antipodas. Mævius autem duplo celerior ſit Septimio, vel comite ejus, Octavio; ſeu, duplo majus iter conficiat Mævius eodem temporis ſpatio, quàm Septimius, vel comes ejus, Octavius. Sejus item in alteram partem verſus, duplo celerior ſit Nonio vel Decio. Quare quo temporis ſpatio Septimius cum comite Octavio veniunt ad B; item Nonius cum comite Decio ad b; Mævius venit ad C, & Sejus ad c. Deinde quando Septimius cum comite Octavio veniunt ad C; item Nonius cum comite Decio ad c; Mævius perrexit in E, & Sejus in e. & ſic ul-

terius progrediendo, in dupla distantia. Qua igitur celeritatis ratione, nempe duplâ, Mævius, nobis spectantibus, adscendendo ex centro A, superat Septimium & Octavium; eadem celeritatis ratione Sejus superat Nonium & Decium descendendo, nostri respectu, ad nostros antipodas: id est, eadem celeritatis ratione Nonius vel Decius deficit à Sejo. Quare hoc ordine nobis conspicientur, Mævius, Septimius cum comite Octavio, Sempronius, Nonius cum comite Decio, Sejus. Itaque bini, Mævius & Septimius nobis viciniores, eadem ratione à centro A absunt, quâ in alteram partem ab eodem centro A distant Nonius & Sejus. Ideoque si omnes consisterent, forte in E, C; c, e, & iter Sempronio, in centro A consistenti, ingrediendum esset in alterutram partem, tantundem laboris suscepturus esset, ut vel ad Septimium in C veniret, vel ad Nonium in c; item, ut ad Mævium in E pergeret, vel ad Sejum in e. Hæc itaque sic sunt signanda : $\frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Octavius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Decius.}}$ $\frac{\text{Nonius.}}{\text{Sejus.}}$ numeris autem sic : $\frac{2}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. Seu, unâ nihili rationum omissâ, $\frac{2}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. Porro ratio dupla, $\frac{2}{1}$ à ratione nihili $\frac{1}{1}$ tanto spatio abest, quanto ab eadem ratione nihili in alteram partem abest ratio dupla $\frac{1}{2}$, quam nostri respectu, & distinctius loquendo, subduplam cum antiquis vocabimus. Itaque ratio $\frac{1}{2}$ æqualis est rationi $\frac{2}{1}$; subdupla duplæ : qvamvis ratio $\frac{1}{2}$ non sit eadem quæ ratio $\frac{2}{1}$. Ideo autem ratio $\frac{1}{2}$ æqualis est rationi $\frac{2}{1}$, quod inter illius terminos 1 & 2, Nonium & Sejum, tantum intervallum sit, quantum inter hujus terminos 2 & 1, Mævium & Septimium. EUCL. Hoc Geometriæ elementis ê diametro repugnat. HERMOT.

Pactus ſum ſilentium. poſtea, ubi quæ dicere inceperam, ediſſeruero, tuas demonſtrationes videbimus. Intervallum autem, ſeu diſtantia inter has duas rationes $\frac{2}{1}$. $\frac{1}{2}$ eſt ratio bis dupla, ſeu $\frac{4}{1}$. Quoniam enim ratio nihili $\frac{1}{1}$ ſuperat rationem $\frac{1}{2}$, ratione $\frac{2}{1}$; ſed rationem nihili ſuperat ratio $\frac{2}{1}$, ratione $\frac{2}{1}$. Ergo ratio dupla $\frac{2}{1}$ ſuperat rationem ſubduplam $\frac{1}{2}$, ratione bis duplâ, id eſt, quadrupla. Quod etiam ex additione planum fit. ſi enim rationi ſubduplæ addatur ratio quadrupla, inde fit, ſeu componitur ratio dupla, in his terminis minimis, 2. 4. 1. nempe binarius ad unitatem relatus duplam rationem facit, compoſitam ex ſubdupla, 2 ad 4; & quadrupla, 4 ad 1. Rurſus ponamus octo homines, quorum quatuor, Lucius, Mævius, Septimius cum comite Octavio, à centro A ad nos tendant; reliqui quatuor, Nonius cum comite Decio, Sejus, Titius, à centro A tendant ad noſtros antipodas. Celeritatis autem inter ipſos ſit diverſitas: & quidem Septimii celeritas ad celeritatem Octavii, ſit in ratione nihili; quia dum Septimii comes ponitur Octavius, æque celeres ambo intelliguntur. Sic de Nonio & Decio. Mævii autem celeritas ad celeritatem Septimii ſit in ratione ſeſquialtera; id eſt, Mævius tria milliaria conficiat quo tempore Septimius duo. Rurſus Lucii celeritas ſit ſeſquialtera celeritatis Mævii; id eſt, Lucius tria milliaria conficiat, quo tempore Mævius duo. Ergo eodem tempore, quo Septimius conficit milliaria duo; Mævius conficit tria; Lucius, quatuor ſemis. & cum Septimius confecit quatuor, Mævius emenſus eſt ſex, Lucius, novem. Igitur Lucii celeritas ad celeritatem

Septimii (novem milliaria ad quatuor) dupla est celeritatis Mævii ad celeritatem Septimii, (sex milliarium ad quatuor.) Lucius enim eadem celeritatis ratione superat Mævium, qua celeritatis ratione Mævius superat Septimium: nempe Lucius tres milliarium terniones (hoc est, novem milliaria) conficit, dum Mævius conficit milliarium terniones duos, (hoc est, sex milliaria.) Rursus Mævius tres milliarium biniones (id est, milliaria sex) conficit, dum Septimius conficit biniones milliarium duos, (id est, milliaria quatuor.) Hæc ita signantur. $\frac{\text{Lucius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Octavius.}}$ numeris autem sic: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}.\frac{4}{4}.$ Similiter ad alteram partem, Titius sesquialtera celeritatis ratione superet Sejum; Sejus item sesquialtera celeritatis ratione superet Nonium. ut prorsus iisdem rationibus inter se distent hi ad antipodas nostros tendentes, quibus inter se distant, qui ad nos evadunt. Hæc ita signamus, $\frac{\text{Nonius}}{\text{Decius}}$ $\frac{\text{Nonius}}{\text{Sejus.}}$ $\frac{\text{Nonius}}{\text{Titius}}$ numeris autem sic: $\frac{4}{4}.\frac{4}{6}.\frac{4}{9}.$ Conjunctim utrasque earundem rationum in diversas partes progressiones, unâ nihili rationum omissâ, sic exponimus: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}.\frac{4}{4}.\frac{4}{6}.\frac{4}{9}.$ Cum itaque ratio sesquialtera $\frac{6}{4}$ tanto spatio absit à ratione nihili $\frac{4}{4}$, quanto spatio ab eadem nihili ratione $\frac{4}{4}$ abest ratio subsesquialtera $\frac{4}{6}$; hæ duæ rationes, sesquialtera, & subsesquialtera, inter se sunt æquales; quamvis non sint eædem. quod una tanto excessu nihili rationem superet, quanto defectu altera à nihili ratione deficit: seu, quod una tanto spatio ad dextram distet, quanto altera ad sinistram. Inter se autem hæ duæ rationes, sesquialtera & subsesquialtera, distant ratione bissesquialterâ, seu duplasuperquartâ. quod etiam ex additione fit evi-

dens. Si enim rationi ſubſeſquialteræ duplaſuperquarta addatur, inde componitur ratio ſeſquialtera; in his minimis terminis, 6. 9. 4. quippe ratio ſeſquialtera 6 ad 4, conſtat ex ratione ſubſeſquialtera, 6 ad 9, & ratione biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperquartâ, 9 ad 4. Similiter ratio biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperquarta $\frac{9}{4}$, major eſt quàm ratio ſubbiſſeſquialtera, ſeu ſubduplaſuperquarta, ratione quaterſeſquialterâ, ſeu ratione biſduplaſuperquartâ, hoc eſt, ratione quintuplaſuperſextadecimâ, $\frac{81}{16}$. Id quod ex additione quoque patet. Si enim rationi ſubbiſſeſquialteræ $\frac{4}{9}$, ſeu $\frac{36}{81}$, addatur ratio quaterſeſquialtera, $\frac{81}{16}$, inde conficitur ratio biſſeſquialtera, $\frac{36}{16}$, ſeu $\frac{9}{4}$, in his minimis terminis, 36. 81. 16. Plane uti, ſi quis quinquaginta deberet, deinde autem centum acciperet, ſoluto debito retineret quinquaginta. Si pro centum tantùm acciperet quinquaginta, ſoluto debito nihil retineret. Idem quoque reductione planum evadit. Reducantur enim propoſitæ rationes $\frac{9}{4}. \frac{6}{4}. \frac{4}{4}. \frac{4}{6}. \frac{4}{9}.$ ad rationes alias: magnitudine quidem eaſdem; diverſas autem, quod omnes eundem habeant terminum conſequentem: nempe ad has, $\frac{81}{36}. \frac{54}{36}. \frac{36}{36}. \frac{24}{36}. \frac{16}{36}.$ Ratio $\frac{81}{36}$ æqualis eſt rationi $\frac{9}{4}$. ratio $\frac{54}{36}$, rationi $\frac{6}{4}$. Sic æquales inter ſe ſunt & reliquæ, $\frac{36}{36}$ & $\frac{4}{4}$. $\frac{24}{36}$ & $\frac{4}{6}$. $\frac{16}{36}$ & $\frac{4}{9}$. Major autem eſt ratio $\frac{81}{36}$ quàm ratio $\frac{16}{36}$, ratione $\frac{81}{16}$. Nihil autem ad rem, quod hac reductione, præcedenti exemplo adcommodatâ, Lucius 81 milliaria conficiat, dum Titius, quem Lucio celeritate parem antea ſtatuebam, conficit tantum 16. Poni enim poſſunt hi duo, Lucius & Titius diverſæ celeritatis, ſed in hoc exemplo proportionaliter ab utroque abeſſe debent Mævius &

Sejus: ille milliaribus 54; hic 24. Ideoque Nonius sesquialtera celeritatis ratione superat Sejum, & hic eadem ratione Titium; contrà atque priori suppositione se invicem superabant: hoc modo, $\frac{\text{Lucius.}}{\text{Septimius.}}\ \frac{\text{Mævius.}}{\text{Septimius.}}\ \frac{\text{Nonius}}{\text{Decius.}}\ \frac{\text{Sejus.}}{\text{Nonius.}}\ \frac{\text{Titius.}}{\text{Nonius.}}$ Porro idem est, si illæ rationes $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}.\frac{4}{4}.\frac{4}{6}.\frac{4}{9}.$ reducantur ad alias æque magnas, sed quæ communem habeant terminum antecedentem; quales sunt, $\frac{36}{16}.\frac{36}{24}.\frac{36}{36}.\frac{36}{54}.\frac{36}{81}.$ $\frac{\text{Septimius.}}{\text{Lucius.}}\ \frac{\text{Septimius.}}{\text{Mævius.}}\ \frac{\text{Nonius.}}{\text{Decius.}}\ \frac{\text{Nonius.}}{\text{Sejus.}}\ \frac{\text{Nonius.}}{\text{Titius.}}$ Hæc alio exemplo sum illustraturus. Supponantur enim quinque homines, Cajus, Lucius, Mævius, Nonius cum comite Decio, in centro A consistentes, qui ad nos per radium AN evadere conentur. Illorum autem celeritatis hoc sit discrimen, quod quo tempore Cajus ab A ad N venit, Lucius veniat ad K; Mævius ad I; Nonius cum comite Decio ad G: hoc est, cum Cajus emensus est milliaria 12, Lucius confecit 9; Mævius, 8; Nonius, 6. Cajus itaque à Nonio maximo spatio abest; adeoque maximam celeritatis rationem Cajus habet ad Nonium. Sed idem Cajus, cum Mævio comparatus, minorem quidem celeritatis rationem constituit, quàm comparatus cum Nonio; majorem tamen quàm si comparetur idem Cajus cum Lucio. ob majorem minoremque binorum inter se distantiam. Maxima igitur celeritatis discrepantia est inter Cajum & Nonium; minor inter Cajum & Mævium; minima inter Cajum & Lucium; quia Nonii tarditas major est quàm Mævii; & Mævii major quàm Lucii. Quare cum Nonii celeritatem superet binario Mævius; quod octo milliaria conficiat Mævius, dum Nonius sex; horum celeritatis ratio est $\frac{8}{6}$ seu $\frac{4}{3}$. Similiter Lucii & Mævii celeritatis

ratio eſt $\frac{9}{8}$: ſed Lucii & Nonii, $\frac{9}{6}$ ſeu $\frac{3}{2}$. Caji & Lucii rurſus, $\frac{4}{3}$; Caji & Mævii, $\frac{3}{2}$; Caji & Nonii, $\frac{2}{1}$. Ergo Lucii & Nonii celeritatis ratio major eſt quàm ratio celeritatis Mævii & Nonii, ratione celeritatis Lucii & Mævii. hoc eſt, ratio $\frac{9}{6}$ major eſt quàm ratio $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{9}{8}$. Item Caji & Mævii celeritatis ratio major eſt quàm Caji & Lucii, ratione celeritatis inter Lucium & Mævium: hoc eſt, ratio $\frac{12}{8}$ major eſt quàm ratio $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{8}$. Item Caji & Nonii celeritatis ratio major eſt quàm Lucii & Nonii celeritatis ratio, ratione celeritatis Caji & Lucii: id eſt, ratio $\frac{12}{6}$ ſuperat rationem $\frac{9}{6}$, ratione $\frac{12}{9}$. Et Caji & Nonii celeritatis ratio ſuperat celeritatis rationem inter Cajum & Lucium, ratione celeritatis inter Lucium & Nonium: hoc eſt, ratio $\frac{12}{6}$ ſuperat rationem $\frac{12}{9}$, ratione $\frac{9}{6}$. Quod ſi ab altera quoque parte quinque homines, per radium An adſcendentes, ponamus, eadem, quæ ſuprà tradita eſt, comparatio inter binos ac binos diverſarum partium inſtitui poteſt. Cæterum illarum rationum mediam, quæ ex æqualibus terminis conſtat; quam propterea æqualem veteres adpellarunt; nihili rationem vocat Euthymius: quemadmodum o, nota nulla, ſeu ſiphra, in abſolutis numeris nihilum ſignificat. Illas autem rationes, quæ ex inæqualibus terminis conſtant; quarum infinitus numerus eſt ab utraque parte nihili rationis; ita diſcriminat, ut quarum antecedens terminus major eſt termino conſequente, adeoque quæ nihili ratione ſunt majores, λόγους ὑπερβολικούς, Exceſsivas rationes, generali nomine adpellet; ſed quarum contrà antecedens terminus minor eſt termino conſequente, quæ ideo nihili ra-

tione ſunt minores, eas vocat λόγυς ἐλλειπ]ικὺς, rationes Defectivas. quomodo ratio $\frac{9}{4}$ eſt exceſsiva; cujus defectiva eſt $\frac{4}{9}$. Poſſent quoque vocari ἀναβαίνοντες, adſcendentes; & καταβαίνοντες, deſcendentes. Item dativi ſeu poſitivi, & ablativi, ob diverſos reſpectus: prior tamen adpellatio, quod ex nominibus in Geometria uſitatis ſit derivata, magis placet. Antiquamus igitur veterum diſtinctionem rationum, quam ſuprà pag. 13 retuli, in rationes majores & minores. quas inepte recentiores, majoris & minoris inæqualitatis rationes vocant. Quod ſi propriis nominibus ſingulæ rationes adpellentur, defectivæ ſunt, quibus additur præpoſitio ſub; uti contrà exceſsivæ ſunt, quibus hæc particula non eſt præpoſita. Illa autem ſignificatione particulam ſub hîc retinemus, ut rationes, ſub nihili ratione collocatas denotet. Et hæc quidem ſunt principia doctrinæ Euthymianæ, quæ quamvis clariſsima ſint, aliis tamen exemplis declarare pergam. Sint quinque homines, Cajus, Lucius, Mævius, Sejus, Titius.

\+ —

8. 4. 0. 4. 8.

Et quidem Cajus in bonis habeat 8; Lucius, 4; Mævius, 0, nihil; Sejus autem & Titius non tantum nihil habeant, ſed etiam nihilo minus; nempe Sejus 4 debeat, Titius 8. Ideoque quanto Caji divitiæ ſupra nihilum adſcendunt, tanto infra nihilum deſcendit paupertas Titii. qui ſi 4 lucraretur, & ſolveret, Seji paupertatem æquaret, qui tantùm 4 debet. Si ſecundùm 4 conſequeretur, adſcenderet ad felicitatem Mævii; qui ne obulum quidem poſsidet, ſed nec obulum debet. Si tertiùm 4 lucraretur, revera aliquid in bonis habere inciperet Titius, nempe 4. quibus Lucii

facultates cenſentur. Si quartùm acciperet 4, jam Caji divitias æquaret, qui 8 poſsidet. Ergo Caji divitiæ ſuperant paupertatem Titii, quem tanto ære alieno obrutum, nihil habere fingimus, numero 16. hoc eſt, ſi Titius, qui 8 debet, lucretur 16, Caji divitias æquare dicetur. Sejo tantùm 12, Mævio 8, Lucio 4 deſunt, ut ad Caji divitias ſinguli adſcendant. Porro hac fictione, qua Titius, qui 8 debet, nihil habere conſideratur, Sejus, qui 4 debet, fingitur habere aliquid, nempe 4: & Mævius, qui nihil habet, duplo eſſe ditior Sejo. Similiter Lucius triplo plus habet quàm Sejus; & Cajus quadruplo. Hæc uti in abſolutis numeris indubitatæ ſunt veritatis, ita & in relatis ad alios, ſeu rationibus. Quod etiam in diverſarum ſpecierum miſtis oſtendam. Sint enim in diagrammate adpoſito quinque miſta ex vino & aqua, in ſeſquialtera ratione utrinque progredientia. Hoc primum conſtare debet, omnia horum miſtorum antecedentia liquida eſſe ejuſdem ſpeciei, nempe vinum; & quidem ejuſdem ſpeciei, ut Rhenanum. Similiter & omnia horum miſtorum conſequentia liquida eſſe ejuſdem ſpeciei, nempe aquam, forte fontanam. Si enim miſtum exceſſivum fit $\frac{9^{v}}{4^{a}}$, & miſtum defectivum $\frac{4^{a}}{9^{v}}$, nulla inter hæc duo miſta eſt diverſitas; ſed unum idemque miſtum, vel majore, vel minore ejuſdem miſti & rationis termino præpoſito, denotatur. quod ut Geometricum hîc eſt obſervandum. Deinde, niſi vinum in omnibus miſtis ſit Rhenanum; ſed in hoc Rhenanum, in illo Gallicum, in ter-

+ o −

$9^{v}.\ 6^{v}.\ 4^{v}.\ 4^{v}.\ 4^{v}.$

$4^{a}.\ 4^{a}.\ 4^{a}.\ 6^{a}.\ 9^{a}.$

$81^{v}.54^{v}.36^{v}.24^{v}.16^{v}.$

$36^{a}.36^{a}.36^{a}.36^{a}.36^{a}.$

tio Hiſpanicum, Phyſicè peccabitur. Porro horum miſtorum medium $\frac{4v}{4a}$ vocamus nihili miſtum; quod, cum ex ejuſdem quantitatis terminis conſtet, nempe ex 4 menſuris vini, & item ex 4 menſuris aquæ, id omni exceſsivo miſto debilius ſit, & omni defectivo fortius. Hoc nihili miſto ſeſquialteris viribus fortius eſt miſtum $\frac{6v}{4a}$; quia hujus miſti vinum, ſex menſurarum, ſeſquialtera ratione ſuperat vinum miſti nihili, 4 menſurarum. Cum autem primum miſtum ſit, quod hîc ſupra nihili miſtum, ſiphræ locum obtinens, adſcendat, unitatis loco id poſitum dicimus. Deinde, cum ſecundum exceſsivum miſtum $\frac{9v}{4a}$, eadem ratione, ſeſquialteris nempe viribus, ſuperet miſtum primum $\frac{6v}{4a}$, quibus hoc primum ſuperat nihili miſtum $\frac{4v}{4a}$; binarii loco hoc ſecundum exceſsivum miſtum poſitum dicemus. Binarius autem duplus eſt unitatis: ergo & miſtum $\frac{9v}{4a}$ duplum eſt miſti $\frac{6v}{4a}$, ſeſquialteræ rationis. Sic ulterius adſcendendo miſtum $\frac{27v}{8a}$ ternarii locum obtinet; & miſtum $\frac{81v}{16a}$ locum quaternarii: adeoque hoc miſtum $\frac{81v}{16a}$ eſt quadruplum miſti $\frac{6v}{4a}$ ſeu $\frac{24v}{16a}$, hoc eſt, ut 4 ad 1. idemque hoc miſtum $\frac{81v}{16a}$ eſt ſupertertium miſti $\frac{54v}{16a}$, hoc eſt, ut 4 ad 3; duplum autem miſti $\frac{36v}{16a}$, ſeu $\frac{9v}{4a}$. Rurſus miſtum $\frac{54v}{16a}$ eſt triplum miſti $\frac{24v}{16a}$; ſeſquialterum autem miſti $\frac{36v}{16a}$. Similiter de rationibus ab altera parte nihili rationis, in ſeſquialtera item ratione, progredientibus, ratiocinabimur. Quippe nihili miſto $\frac{4v}{4a}$, in ſeſquialtera ratione debilius eſt miſtum $\frac{4v}{6a}$; quia hujus miſti aqua, ſex menſurarum, ſeſquialtera ratione ſuperat aquam miſti nihili, 4 menſurarum. Cum autem hoc primum miſtum ſit, quod hîc à nihili miſto deficit,

defectivæ unitatis loco id positum dicimus. Sic binarii defectivi loco erit mistum $\frac{4v}{9a}$. ternarii defectivi loco, mistum $\frac{8v}{27a}$. quaternarii defectivi loco, mistum $\frac{16v}{81a}$. eodemque, quo de excessivis, modo ulterius de his defectivis ratiocinabimur. Cæterum ponamus forte servos quinque, ratione servitutis, honestioris aut vilioris, quam eidem domino serviunt, bibere hæc quinque mista: primus, fortissimum mistum $\frac{9v}{4a}$; ultimus, debilissimum $\frac{4v}{9a}$. Fingat autem ultimus, cum debilissimum mistum bibat, nempe $\frac{4v}{9a}$, se nihili mistum bibere; sed biburum aliquarum virium mistum, si quando ad honestius ministerium quarti, qui bibit mistum $\frac{4v}{6a}$, quod in sesquialtera ratione fortius est misto $\frac{4v}{9a}$, à domino promoveatur. Quare quarti servi mistum $\frac{4v}{6a}$, unitatis loco ab hoc ultimo servo ponitur; tertii autem, qui bibit mistum nihili $\frac{4v}{4a}$, loco binarii: ideoque mistum $\frac{4v}{4a}$, secundum hanc fictionem duplum est misti $\frac{4v}{6a}$, in sesquialtera progressione. Sic deinceps ternarii loco ipsi erit mistum $\frac{6v}{4a}$, servi secundi; & quaternarii loco, mistum $\frac{9v}{4a}$, servi primi. Quare primi servi mistum $\frac{9v}{4a}$, hac fictione quadruplum est misti $\frac{4v}{6a}$, servi quarti; duplum misti $\frac{4v}{4a}$, servi tertii; supertertium misti $\frac{6v}{4a}$, servi secundi. Et secundi servi mistum $\frac{6v}{4a}$, sesquialterum est misti $\frac{4v}{4a}$, servi tertii; triplum misti $\frac{4v}{6a}$, servi quarti. Id quod clarius constat ex iisdem his mistis ad eandem aquæ quantitatem reductis, ut & in præcedenti diagrammate factum. Fortius autem est mistum $\frac{81v}{36a}$ quàm mistum $\frac{16v}{36a}$, in ratione quatersesquialtera, seu quintupla & superoctogesima, $\frac{81}{16}$; quamvis ratio $\frac{81}{36}$ tantùm sit bissesquialtera. Plane uti paginâ 110, Caji divitiæ supera-

bant paupertatem Titii, numero 16; licet hujus dimidium tantùm poſsideret Cajus, nempe 8. Quod ſi revera, non autem fictione, nihil habuiſſet Titius, quater per quaternarium facultates augendo, perveniſſet non ad 8, ſed ad 16. Similiter, ſi revera ratio $\frac{16}{36}$ eſſet ratio nihili, non ad rationem $\frac{81}{36}$ veniretur, quater rationem ſeſquialteram rationi nihili addendo, ſed ad rationem $\frac{81}{16}$; uti in hac progreſsione mere exceſsiva conſpicitur, $\frac{81}{16}$. $\frac{54}{16}$. $\frac{36}{16}$. $\frac{24}{16}$. $\frac{16}{16}$. Illud igitur ex his liquet, duobus modis rationes defectivas conſiderari poſſe: uno, genuino; cum à nihili ratione $\frac{4}{4}$ incipiendo, unitatis loco ponitur ratio $\frac{4}{6}$; loco binarii, ratio $\frac{4}{9}$; ternarii, $\frac{8}{27}$; quaternarii, $\frac{16}{81}$, & ſic deinceps: altero, fictitio; cum exceſsivas & defectivas conjunctim, mere exceſsivas fingimus; uti in præcedenti exemplo, nihili rationis loco ſtatuitur ratio $\frac{4}{9}$; loco unitatis, ratio $\frac{4}{6}$; binarii, $\frac{4}{4}$; ternarii, $\frac{6}{4}$; quaternarii, $\frac{9}{4}$. Porro & illud ex his cognoſcere promtum eſt, quid ſit rationum compoſitio, ſeu additio; &, quid rationum, alterius ab altera ablatio. Ratio rationi addita dicitur, cum vel unius rationis antecedens magnitudo, eſt alterius conſequens; vel, quod eodem recidit, unius rationis conſequens magnitudo eſt alterius antecedens; adeoque, cum tribus magnitudinibus duæ rationes comprehenduntur, quarum extremis ratio ex duabus illis compoſitis nata includitur. Quatuor autem modis additio perfici poteſt: plane uti in rebus ſimplicibus, alteram alteri aut ſuprà adpono, aut infrà; ſeu, vel ad dextram, vel ad ſiniſtram. Duas enim lineas $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ compoſiturus, ſi lineam $\frac{C}{D}$ addere velim lineæ $\frac{A}{B}$, aut ſuprà illam addo,

extremum D jungendo extremo A; aut infrà, extremum C componendo cum extremo B. Rursus, si lineam $\frac{A}{B}$ jungere velim lineæ $\frac{C}{D}$, aut supra illam adpono, componendo extremum B cum extremo C; aut infrà, jungendo extremum A, extremo D. Hos quatuor rationes quoque componendi modos, perspicuitatis causa sequenti diagrammate inclusos, mihi tradidit.

				ut ad ita ad			
Rationes duas, $\frac{A}{B}$ $(\frac{6}{3})$ & $\frac{C}{D}$ $(\frac{12}{8})$ compositurus, aut	rationi $\frac{A}{B}$ $(\frac{6}{3})$ addo rationem	suprà	faciendo,	D. C : A. E 8. 12 : 6. 9.	unde composita ratio est,	E 9 B 3.	C E. 9 D A. 6 B. 3
	$\frac{C}{D}$ $(\frac{12}{8})$ idque vel	infrà		C. D : B. E. 12. 8 : 3. 2.		A 6 E 2.	A 6 C B. 3 D E 2
	rationi $\frac{C}{D}$ $(\frac{12}{8})$ addo rationem	suprà		B. A : C. E. 3. 6 : 12. 24.		E 24 D 8.	A E. 24 B C. 12 D. 8
	$\frac{A}{B}$ $(\frac{6}{3})$ idque rursus vel	infrà		A. B : D. E. 6. 3 : 8. 4.		C 12 E 4.	: C. 12 A D. 8 B E. 4

Ultimum componendi modum adhibuit in figura paginæ 98. ubi factum est, ut A ad B, seu RS ad ST; ita D ad E, seu VS ad SX. Ratio enim $\frac{C}{E}$ constat ex ratione $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Qua quidem rationes componendi methodo rerum natura nullam breviorem admittit, nullam concinniorem. Sic si scire expetam, quam celeritatis rationem efficiat paginâ 108, ratio celeritatis inter Mævium & Nonium, quæ supertertia est, juncta celeritatis rationi inter Lucium & Nonium, quæ est sesquialtera; invenio rationem celeritatis duplam, inter Cajum & Nonium: quippe sesquialteræ celeritatis rationi inter Lucium & Nonium, æqualis est sesqvialtera

celeritatis ratio inter Cajum & Mævium. adeoque supertertiæ rationi celeritatis inter Mævium & Nonium, addita est sesquialtera celeritatis ratio inter Cajum & Mævium, id est, inter Lucium & Nonium. nempe ratio $\frac{12}{6}$ composita est ex ratione $\frac{12}{8}$, & ratione $\frac{8}{6}$. Quod si altera ratio ex addendis excessiva sit, altera defectiva, iisdem modis compositio perficietur. Etenim rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4}$ additæ faciunt rationem $\frac{6}{4}$: rationes autem $\frac{1}{2}$ & $\frac{4}{3}$ compositæ faciunt rationem defectivam $\frac{4}{6}$. At rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{3}$ additæ, exhibent rationem nihili $\frac{6}{6}$. uti in simplicibus numeris +3 & −3 additi, faciunt nihil: at +3 & −8, faciunt −5. Si enim, in orientem navigando tendens, per tria milliaria sim progressus, totidem autem adversi venti vehementiâ retroagar, nihili iter confecisse recte dicor: quod si, tria milliaria progressus, per octo milliaria retro agar, tantùm abest, ut vel nihili iter confecerim, ut ante quinque milliaria sint emetienda. Ratio porro à ratione ablata dicitur, cum ad eandem magnitudinem consequentem utrâque reductâ, ratio differentialis, quâ major minorem superat, innotuit. Utraque autem ratio; tam ea, de qua demitur altera, quàm demenda; si vel hæc excessiva sit, & illa defectiva, aut contrà; in eodem rationum ordine ac genere, aut excessivo, aut defectivo, considerantur. quod idem est, ac si rationem auferendam, si excessiva est, ponam ut defectivam; si defectiva, ut excessivam; & alteri deinde addam. Rationis igitur auferendæ magnitudinibus inversis, hanc compono cum altera, à qua ablatio est facienda. Unde planum est, quatuor additionis modos,

ſupra deſcriptos, & in auferendo uſurpari poſſe. quos itidem, ut omnia clara eſſent, diagrammate expoſitos exhibuit.

Rationem $\frac{C}{D}(\frac{12}{8})$ à ratione $\frac{A}{B}(\frac{6}{3})$ ablaturus, inverto magnitudines rationis auferendæ $\frac{C}{D}(\frac{12}{8})$, ita ut antecedens C(12) ſit conſequens; & conſequens D (8) ſit antecedens, ſic $\frac{C}{D}(\frac{8}{12})$. Deinde has duas rationes compono: & quidem aut	rationi $\frac{A}{B}(\frac{6}{3})$ addo rationem $\frac{C}{D}(\frac{8}{12})$ idque vel	ſuprà		ut D. ad C: ita A. ad E. 12. 8 : 6. 4.		E 4 B 3.	C E. 4 D A. 6 B. 3
		infrà	faciendo	C. D : B. E. 8. 12 : 3. 4½.	unde compoſita ratio eſt,	A 12 E 9.	A 12 C B. 6 D E 9
	rationi $\frac{C}{D}(\frac{8}{12})$ addo rationem $\frac{A}{B}(\frac{6}{3})$ idque rurſus vel	ſuprà		B. A : C. E. 3. 6 : 8. 16.		E 16 D 12.	A E 16 B C. 8 D 12
		infrà		A. B : D. E. 6. 3 : 12. 6.		C 8 E 6.	C. 8 A D. 12 B E. 6

Rationem autem $\frac{A}{B}(\frac{6}{3})$ ablaturus à ratione $\frac{C}{D}(\frac{12}{8})$, illas ita collocans $\frac{A}{B}(\frac{3}{6})$ $\frac{C}{D}(\frac{12}{8})$ compono: unde ſecundum quatuor illos modos differentia in ſequentibus numeris innoteſcit; $\frac{E}{B})\frac{9}{12}.\ \frac{A}{E})\frac{3}{4}.\ \frac{E}{D})\frac{6}{8}.\ \frac{C}{E})\frac{12}{16}.$ Cum enim in ratione $\frac{3}{2}$ fueram progreſſus; per $\frac{1}{2}$, rationem majorem, regredior. In ſuperiori autem exemplo, ſi de ſeſquialtera celeritatis ratione Lucii ad Nonium, demam ſupertertiam celeritatis rationem Mævium ad Nonium, relinquitur ſuperoctava celeritatis ratio, ſpectata inter Lucium & Mævium; in his terminis, $\frac{9}{6}.\frac{8}{9}|\frac{9}{8}.$ Sic cum de ſubquadrupla demo ſubſupertertiam, relinquitur ſubtripla: at ſi de ſupertertia demere velim quadruplam, tantum abeſt ut hoc facere poſsim, ut ſupertertiæ tripla prius addita eſſe deberet. Progreſſus itaque per ſupertertiam regredior per ſubquadruplam; unde regreſſus ſuperat progreſſum ratione ſubtripla. Uti ſi de 4, quæ in bonis habeo, ſolvere velim 12, quæ debeo; cùm totum ſolvere ne-

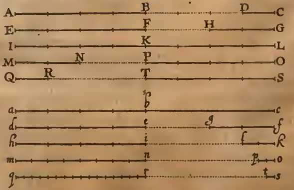
queam, minuo tamen debitum, uſque ad tertiam partem, ut ſolvenda tantum reſtent 8. Eucl. Plane nova Geometriæ elementa Euthymius condere videtur. ſed cum omnes iſtæ ratiocinationes ex male intellectis meis elementis natæ ſint, facile eas refutare poſſum. Archim. Utinam poſsis, ô Euclides. Jam quaſi per nebulam majus aliquod veritatis lumen conſpicio, quod ex tuis elementis quædam obſcuraturum videtur. Hermot. Clariſsimum, & nulla obſcuritatis nebula interceptum veritatis ſolem paulo poſt videbis. Sed prius, ſi patimini, alio modo eadem hæc Euthymii principia vobis ſum expoſiturus; deinde ad ſingula, quæ contra hæc adferetis, reſpondebo. Rationis natura & eſſentia conſiſtit in duabus ejuſdem generis rebus, (quæ vel magnitudinibus tantùm exponuntur; vel etiam, ſi commenſurabiles ſint magnitudines, numeris:) ſecundum certam magnitudinem; vel etiam, ſecundum numerum, inter ſe comparatis. Quantitas autem rationis in duarum magnitudinum inter ſe diſtantia ſpectatur: quæ diſtantia cum infinitæ ſit aut parvitatis, aut magnitudinis; hinc colligimus, quavis ratione infinite minorem, aut majorem, ſaltem potentiâ, dari poſſe. Porro nihili rationem, quæ in æqualibus magnitudinibus ſpectatur, rationem quidem eſſe ſtatuimus; ſed nullius quantitatis; quod nihili diſtantiâ magnitudines illius, antecedens & conſequens, inter ſe diſtent. Quæcunque autem alia, magna, parva, unitatis loco accipi poteſt. Cæterum duorum numerorum, naturali ſerie ſe proxime conſequentium, duo primi, 1 & 2, maximam

rationem comprehendunt: quæ ratio in creſcentibus numeris, proximis binis ac binis inter ſe comparatis, in infinitum decreſcit; adeo ut duæ lineæ in infinitum, ſaltem potentiâ, ſibi invicem propriores fieri poſsint, & minus inter ſe ſpatium relinquere, nunquam tamen concurrere. Quod fieri poſſe multi, qui hæc penitus perſpecta non habent, negârint. In adjuncto igitur dia-



grammate clariſsime id expoſui. in quo poſt nihili rationem; ſpectatam inter duas lineas, in medio concurrentes, dum una à dextra ſiniſtrorſum, altera à ſiniſtra dextrorſum æquabiliter progreditur; primo loco eſt ratio dupla, inter numeros 2 & 1: ſecundo loco, ratio ſeſquialtera, inter numeros 3 & 2: tertio, ſupertertia, in numeris 4 & 3: quarto, ſuperquarta, inter 5 & 4: & ſic undecimo loco, ſuperundecima, in terminis 12 & 11. Centeſimo loco erit ſupercenteſima, in terminis 101 & 100:

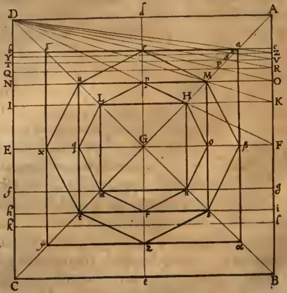
millesimo, supermillesima, inter 1001 & 1000. & ita progrediendo in infinitum. Omnium autem multiplarum minima primo loco est, nempe ratio dupla: at omnium superparticularium maxima secundo loco, nimirum sesquialtera. Cæterum cùm omnis ratio unitatis loco considerari posit, ex ea bis composita, dupla efficitur primæ, seu simplæ; ex ter composita, simplæ tripla; ex vicies composita, simplæ vigecupla. Ter autem composita, seu tripla, sesquialtera est bis compositæ, seu duplæ: quater composita, seu quadrupla, supertertia est, ter compositæ, seu triplæ. Sic decies composita dupla ratio, $\frac{1024}{1}$, supernona est novies compositæ duplæ rationis, $\frac{512}{1}$. Quinquagies sexies autem composita ratio superoctogesima, primo major est simpla ratione dupla. Quæ quidem compositio, quomodo fiat, ex altero hoc



diagrammate patet. in quo à sinistro latere positæ sunt antecedentes magnitudines, à dextro autem consequentes.

Porro, in naturali situ, locomedio, posita est ratio nihili, quam habet linea $\substack{I\\K}$ ad lineam $\substack{L\\K}$. ratio autem lineæ $\substack{L\\K}$, id est $\substack{E\\F}$, ad lineam $\substack{G\\H}$, est dupla. Primo igitur supra rationem nihili adscensu ventum est ad rationem, omnium multiplarum minimam; quavis autem superparticularium majorem; cum per innumeras alias rationes, majores, minores, supra nihili rationem adscensus fieri potuisset. Porro linea $\substack{G\\H}$ dupla est lineæ $\substack{C\\D}$: adeoque linea $\substack{L\\K}$, hoc est $\substack{A\\B}$, quadrupla est lineæ $\substack{C\\D}$. Rursus infra nihili rationem progrediendo, linea $\substack{M\\N}$ subdupla est lineæ $\substack{O\\P}$. Essentiâ autem suâ subdupla ratio æqualis est rationi duplæ; quia distantia magnitudinum utriusque rationis est æqualis. quippe inter duplæ rationis magnitudines $\substack{E\\F}$, $\substack{G\\H}$ tanta distantia est, quanta inter subduplæ rationis magnitudines $\substack{M\\N}$, $\substack{O\\P}$: at vero cum in diversas partes hæ rationes tendant; dupla adscendendo, descendendo subdupla; ratio dupla superat rationem subduplam, ratione quadrupla. Porro $\substack{M\\N}$ dupla est ipsius $\substack{Q\\R}$: ergo $\substack{Q\\R}$ ipsius $\substack{S\\T}$, seu $\substack{L\\K}$, est subquadrupla. Superat autem ratio quadrupla rationem subquadruplam, ratione sedecupla; hoc est, si rationi subquadrupla addatur bis quadrupla, id est, sedecupla, inde conficietur ratio quadrupla, in his terminis 4. 16. 1. quod etiam reductione harum rationum ad eundem terminum consequentem facta clarescit, in his numeris: $\frac{16}{4}$. $\frac{8}{4}$. $\frac{4}{4}$. $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quod si ratio quadrupla vere esset ratio nihili, quater rationem duplam addendo, veniretur ad rationem sedecuplam. $\frac{16}{1}$. $\frac{8}{1}$. $\frac{4}{1}$. $\frac{2}{1}$. $\frac{1}{1}$. quod altero diagrammate exposui, ubi $\substack{a\\b}$, ut ita dicam, nulla est ipsius $\substack{c\\b}$: at $\substack{c\\b}$, seu $\substack{d\\e}$, dupla est ipsius $\substack{f\\g}$. Deinceps $\substack{f\\g}$ dupla est ipsius $\substack{h\\i}$: ergo $\substack{c\\b}$,

hoc eſt, $\frac{h}{i}$ bis dupla, ſeu quadrupla eſt ipſius $\frac{k}{l}$. Rurſus $\frac{k}{l}$ dupla eſt ipſius $\frac{o}{p}$: ergo $\frac{c}{b}$, hoc eſt, $\frac{m}{a}$ terdupla, ſeu octupla, eſt ipſius $\frac{o}{p}$. Denique $\frac{o}{p}$ dupla eſt ipſius $\frac{s}{t}$: quare $\frac{c}{b}$, hoc eſt, $\frac{q}{r}$ quaterdupla eſt, ſeu ſedecupla, ipſius $\frac{s}{t}$. Atque hac methodo quævis rationes componi poſſunt, atque altera ab altera auferri. Alium inſuper has rationes conſiderandi modum addam; ex qua eadem veritas conſpiciatur.



Sit enim quadrátum A B C D, in quo ductis diagoniis A C, B D; & biſectis lateribus per lineas E F, *ed;* ducatur ex angulo D, ad biſectionis punctum F, linea D F, quæ diagonium A C ſecat in puncto H. Si per hoc punctum H recta ducatur I K, lateri AB, aut B C,

parallela; etiam ab altera diagonio B D, eadem linea ſecatur in L: adeo ut in duobus iis punctis in tres æquales partes linea I K, id eſt A B, ſit diviſa. quod ad Ariſtidem Quintilianum ab Euthymio eſt demonſtratum. Quod ſi rurſus puncta D & K per lineam DK conjungantur, recta M O, ſeu O A, erit lineæ A B pars quarta: deinceps PR ſeu R A, ejuſdem lineæ eſt pars quinta; S V, ſeu V A, pars ſexta: & ſic in infinitum, potentiâ ſaltem, eandem operationem continuando, in quotcunque partes æquales propoſita linea Geometricè ſecabitur. Infra lineam $^{E}_{F}$ ſimiliter eadem ratione hæ ſectiones procedent. Linea enim $^{f}_{g}$ per duo puncta, m & n, in tres partes æquales ſecatur: linea autem $^{h}_{i}$ in partes quatuor, per tria puncta, t, r, s. & ſic deinceps lineæ cujuſvis, in eadem diſtantia infra mediam $^{E}_{F}$ ſitæ, in qua ſupra eandem $^{E}_{F}$ alia erat poſita, eaſdem partes nanciſcemur, in quas hæc erat diviſa. Ex iis autem ita ratiocinamur. Cum linea $^{E}_{F}$, hoc eſt $^{A}_{B}$, biſecta ſit in G; per quod punctum lineæ $^{A}_{B}$, vel $^{D}_{C}$, parallela ducta eſt $^{d}_{e}$; erit linea $^{E}_{G}$ ad lineam $^{F}_{G}$ in ratione nihili; utpote æquæ magnitudines inter ſe comparatæ. Cæterum antecedentes rationum, tam defectivarum, quam exceſsivarum, omnes ſiniſtro latere $^{D}_{C}$ & diagonio $^{A}_{C}$ concluſas hîc ſpectamus; & conſequentes, eadem diagonio $^{A}_{C}$ & dextro latere $^{A}_{B}$. ideoque ſectionum puncta, quæ exceſsivas rationes faciunt, in dimidia diagonio $^{A}_{G}$ exiſtunt; uti illa, quæ defectivas, in dimidia $^{G}_{C}$. Porro linea $^{I}_{K}$, in tres æquas partes ſecta, (quarum duæ $^{I}_{H}$, ſiniſtro latere $^{D}_{C}$, & diagonio $^{A}_{C}$ comprehenſæ, antecedentem faciunt; tertia autem $^{K}_{H}$, eadem

diagonio $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}$, & dextro latere $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$ inclusa, consequentem:) duplam rationem exhibet. quare punctum H, in dimidia diagonio $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{G}$, dextram versus ab æqualitate est remotum. Deinde sectâ lineâ $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{O}$ in quatuor æquales partes, illarum tres $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{M}$, tanquam antecedens, ad unam $\genfrac{}{}{0pt}{}{M}{O}$, ut consequentem, triplam rationem efficiunt. Sectionis autem punctum M, magis recessit ab æqualitate, hoc est, à lineæ $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$ puncto p, quam punctum H ab eadem linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$, eandem versus partem, fuerat remotum. Major igitur harum partium $\genfrac{}{}{0pt}{}{N}{M}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{O}{M}$, inter se ratio est, nempe tripla; quam erat partium $\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{H}$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{K}{H}$, nempe dupla. Postea $\genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{P}$ quadrupla est ipsius $\genfrac{}{}{0pt}{}{R}{P}$. & sic altius adscendendo. Cum autem sesquialtera ratio minor sit ratione dupla, punctum sectionis propius à linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$ aberit, quam inde abest punctum H. quod in linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{Q}{R}$, in quinque partes per quatuor diagonios tributâ, est manifestum. Omnes autem in universum superparticulares rationes intra spatium F E I K includuntur; uti omnes multiplæ rationes duplo majore spatio, A D I K, sunt comprehensæ. Itaquè uti in infinitum, potentiâ, altius à dupla ratione, lineam $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{D}$ versus, adscenditur; sic in infinitum propius ac propius ad lineam $\genfrac{}{}{0pt}{}{E}{F}$, hoc est, ad nihili rationem, venietur, eandum lineam $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$ secundum rationes superparticulares secando. Ab altera autem parte, seu infra lineam $\genfrac{}{}{0pt}{}{E}{F}$, eædem plane sectionum rationes spectantur in dimidia diagonio $\genfrac{}{}{0pt}{}{G}{C}$, sinistram versus à linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$ remotæ. Quare linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{f}{g}$ tanto spatio infra lineam $\genfrac{}{}{0pt}{}{E}{F}$ descendit, quanto supra eandem adscendit linea $\genfrac{}{}{0pt}{}{I}{K}$; eademquè ratione, qua hæc, per diagonium $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{C}$ est divisa. quod similiter de cæteris

monſtrabitur. Hoc autem ſchemate adumbrare utcunque poſſum, longitudinis dierum ac noctium varietatem ac viciſsitudinem, quam populi, qui citra aut ultra æquatorem habitant, experiuntur; licèt omnes, diei ac noctis ſimul, 24 horas numerent. Si enim Æquator fingatur EF, in duas æquas partes tributus: quarum EG, quæ à ſiniſtra eſt, diem denotet; altera FG, quæ à dextra, noctem; ſub illo habitantes diei longitudinem ad longitudinem noctis ſemper habent in ratione nihili: quod utraque duodecim horarum exiſtat. Porro IH, polum boréum verſus, diem 16 horarum notet; & KH, horarum 8 noctem. Eodem autem tempore, quo nos 16 horarum diem, & 8 noctem habemus, contrà antoeci noſtri, qui ſub parallelo fg habitant, 8 horarum diem, in linea fm, & 16 horarum noctem, in linea gm, obſervant. Nos itaque quadruplo tum temporis antoecis noſtris ſumus feliciores. quippe duplo plus gaudemus, ob duplam diei longitudinem; & duplo minus triſtamur, ob duplam noctis brevitatem. Quod quidem illuſtriſsimum exceſsivarum ſimul & defectivarum rationum exemplum, omnibus populis, qui clariſsimo mundi lumini venienti gratulantur, & abeunti lætum reditum precantur, Deus obſervandum propoſuit. Atque ex his principiis omnia Euthymii dogmata, tàm quæ veſtra, illuſtres Geometræ, principia convellunt, & falſitatis convincunt, quàm quæ recentiorum hallucinationes oſtendunt, deducuntur. Illud, enim inquiebat Euthymius, ex his manifeſtum eſt, rationis Geometricæ naturam & eſſentiam in magnitudinum, quæ rationem conſtituunt, inter ſe diſtantia

(quod in Arithmetica ratione omnes admittunt) generaliter esse constitutam: uti absolutorum numerorum essentia in distantia à nihilo spectatur. Quod non supposuisse hic videri debeo, sed ex rerum natura, tot exemplis fœcundâ, demonstrasse. Ex parte autem hoc principium Euclides admisit, nempe in rationibus excessivis: sed generaliter, in omnibus rationibus, etiam defectivis, hujus dogmatis veritatem primus ostendo. Falsa igitur est octava propositio libri quinti Elementorum Euclidis, & decima; quas pag. 32, & 36 retuli; & multæ aliæ, quæ ab his pendent. Falsa ergo est, uti postea amplius ostendam, libri quinti definitio septima; quam pagina 30. & 4. retuli: quâ, tanquam basi, octava illa propositio nititur. Multæ autem propositiones veterum, quamvis falsæ non sint, male tamen ex his elementaribus demonstratæ probantur. Male enim Euclides, hac octavâ quinti usus, demonstravit ejusdem libri propositiones XIV. XX. XXI. Male quoque divinus Archimedes ex eadem demonstravit secundam propositionem libri primi de Sphæra & Cylindro; quam pagina 37 adduxi. ad quam Eutocius commentando multas erroneas propositiones, ex octava quinti deductas, protulit; quas ante ipsum Pappus produxerat Mathematicorum Collectaneorum libro VII: ex quo desumtas libri quinti elementorum fini juniores illas adtexuerunt. Ex illa quoqne octava quinti propullulavit insignis illa paralogismorum series, in secunda demonstratione VIII propositionis libri II de Sphæra & Cylindro, quæ à paginæ 48 versu 23, his verbis incipit: δεικτέον ὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ.

Monstrandum igitur, quadratum à CH in HF minus esse rectangulo à BHC in HG. quod idem est ac monstrare, quadratum à CH, ad rectangulum à BHC, minorem rationem habere, quàm rectam GH ad HF. Nempe 16 ad 24 minorem habere rationem quàm habeat $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$, seu 21 ad 31: cum contrà statuendum sit, 16 ad 24 majorem habere rationem quàm habeat 21 ad 31. Quoniam enim est, ut 16 ad 24, ita 21 ad $31\frac{1}{2}$, major est distantia inter 21 & $31\frac{1}{2}$, hoc est, 16 & 24, quam inter 21 & 31. Nulla autem ex omni antiquitate Mathematica illustrior propositio proferri potest, quàm hæc sit octava Archimedis; in qua toties dicatur, quæ ratio major sit, quæ minor; quæ alterius dupla, quæ sesquialtera. in quo cum Theone juniores omnes, & in primis Gregorius à S.to Vincentio, tam amplè errarunt. Ideoque Eutocii commentarium, quo fusissimè hæc propositio, & Euclidéa doctrina, id est, libri quinti propositiones, VIII & X enarrantur, totum proferendum putavi, ut, quid veteres hìc docuerint, clare omnibus constaret. Ita autem hæc cohærent, ut omnes juniorum errores, non perspectis veterum erroribus, solide dijudicari nequeant. Quare, inquiebat Euthymius, cum is præcipuus hujus narrationis mihi scopus sit, ut totam antiquitatem ignoratæ in quibusdam elementis Geometriæ convincam; deinde autem juniorum pravas explicationes, & monstrosas hallucinationes demonstrem; antiquis hunc honorem habebo, ut primi, demonstrationum viribus adacti, veritati, omnium rerum antiquissimæ, victoriam concedere cogantur.

Agite ergo, ô præclari mathematici, & omnes ingenii nervos contendite, ut & acutè omnia, quæ porro relaturus ſum, inſpiciatis; & alacriter veſtra, rationibus adductis, defendatis. Falſam dixi quinti libri propoſitionem octavam. Quod ſi illa, quæ in principiis paulo ante expoſui, bene vobis perpenſa eſſent, falſitatis quoque cauſas perſpectas haberetis. Duobus autem modis illius falſitatem oſtendam. Primo, falſa Euclidis principia demonſtrando: Altero, vera Euthymii principia confirmando. Antiquorum omnium, adeoque ſummorum virorum, ſententiam, quæ undecunque auctoritatis plurimum ac roboris habet, primo loco, inquiebat Euthymius, propterea ponam, ne quod præjudicium, novam initio adſtruendo, aut veritati, aut tibi, aut etiam utrique, adferatur. Tres autem hujus propoſitionis caſus eſſe poſſunt. Vel enim tertia D, utravis reliquarum, $\frac{A}{B}$, C, minor eſt; vel major: vel majore, $\frac{A}{B}$, minor; minore autem, C, major. Primo caſu primum hujus propoſitionis membrum, quod paginâ 32 relatum eſt his verbis; *Inæqualium magnitudinum major, ad eandem, majorem rationem habet quàm minor;* Euthymius verum pronunciat: falſum autem membrum ſecundum, revertendo adverſam priori ſententiam proferens; quod ibidem his verbis conceptum adtulimus; *& eadem, ad minorem, majorem rationem habet quàm ad majorem.* Atque hujus primi caſus illud exemplum ponemus, quod Græci codices, editus & manu ſcripti, adferunt: quod & Commandinus retinuit, Græci codicis religioſus interpres; quem ſine cauſa hîc deſeruit Clavius, dum ter-

tiam D, ſecunda C, poſuit majorem, propoſitionum XIV. XX. XXI. ejuſdem libri demonſtrationes, ut puto, ſecutus. Verum igitur eſt primum membrum, nempe $\frac{A}{B}$ ad D, ſeu 7 ad 4, majorem rationem habere, quàm C ad D, ſeu 5 ad 4: at falſum, membrum ſecundum, nempe D ad C, ſeu 4 ad 5, majorem rationem habere, quàm D ad $\frac{A}{B}$, ſeu 4 ad 7. Secundo caſu primum membrum falſum eſt; verum autem ſecundum. Falſum enim eſt, 4 ad 6 majorem rationem habere, quàm 3 ad 6; ſed verum, 6 ad 3 majorem rationem habere quàm 6 ad 4. Tertio caſu falſum eſt utrumque membrum. quippe & hoc falſum eſt, 4 ad 3 majorem habere rationem, quàm 2 ad 3; & iſtud, 3 ad 2 majorem habere rationem, quàm 3 ad 4; quod diverſi generis rationes, exceſsiva & defectiva, inter ſe comparari nequeant. Quare ex tribus hujus propoſitionis caſibus, unus verus eſt, reliqui duo falſi; ut ſtatim demonſtrabimus. Eucl. Si quæ unquam ineptiæ, & olim, cum inter mortales degerem, & ex quo hac beatâ quiete mihi frui licuit, fando ad aures meas pervenére, inter illas certe has Euthymii tui, ô Hermotime, primo loco cenſere poſſum. Ut enim illud nunc prætercam, inconcuſſo fundamento, ſeptimâ nimirum ejuſdem libri definitione, niti hanc noſtram propoſitionem, faciliori adhuc viâ eandem veritatem hic demonſtratam dabo. Sint enim eædem lineæ, iidem numeri, quos tu ante proferebas. Dico (numeros ſolos adcommodans, ut brevius me expediam,) non tantùm 7 ad 4 majorem rationem habere quàm 5 ad 4; quod etiam conceſsit

Euthymius; sed & revertendo; quod ejusdem propositionis secundo membro volo; 4 ad 5 majorem rationem habere quàm 4 ad 7. Quis enim mortalium, exceptis Euthymio & Hermotimo, dubitat; vel unquam dubitavit, aut venientibus seculis dubitaturus est, quin, uti verum est, septem partes quartas majores esse quinque partibus quartis, sic immotæ veritatis sit, quatuor partes quintas majores esse quàm quatuor partes septimas. THEO. Sic optimè, ô Euclide. hoc quoque, in recensendis tuis elementis, hujus propositionis principium sum secutus. PAP. Ego quoque in tot insignium mathematicorum propositionibus colligendis; & tuis, ô Apolloni, lemmatis demonstrándis. APOL. Certe & ipse hujus propositionis veritatem ab illo fundamento arcessendam putavi. EUTOC. Nemo mathematicus ab alio censeret. ARCHIM. Fateor & me hac sententiâ olim fuisse imbutum; sed ex iis, quæ principiorum loco ante retulit Hermotimus, jam aliter video hæc esse concipienda. HERMOT. Te unum, tanto ingenio mathematicum, tanta solertia mechanicum, his Euthymii dogmatis adsensum præbere, ô Archimede, hoc vero est quod me confidentiorem reddit. recensendo pergens faciam, spero, ut & tu in hac sententia, quam adeo feliciter concepisti, confirmeris, & cæteri deinde unanimi consensu tibi accedant. Euthymius itaque, cum mentem sæpius in id intendisset, ut in rerum natura principium, quo fisi veteres hoc adseruissent, indagaret, nullum aliud reperire potuit, quàm quod jam ab Euclide propositum est, & cæterorum calculo confirmatum;

nempe minutias inſpexiſſe Arithmeticas Eudoxum, Euclidem, & quotquot veterum aut hos præceſſiſſent, aut, octavam uſurpando, eſſent ſecuti. Nam & in minutiis, uno integro majoribus, quarum termini exceſſivas rationes conſtituunt, manifeſtam vidére veritatem; & in minutiis, uno integro minoribus, quarum termini rationes defectivas faciunt, certitudinem non minus, ut putarunt, evidentem. Cum igitur minutia $\frac{7}{4}$ major ſit quàm minutia $\frac{5}{4}$; quod numerus 7 majori ſpatio à nihilo diſtet quàm numerus 5: contrà autem minutia $\frac{4}{5}$ major ſit quàm minutia $\frac{4}{7}$; quod cum utraque æque multas habeat partes, illa majores habeat, hæc minores; nempe illa quintas, hæc ſeptimas: hinc adeo 7 ad 4 majorem rationem habere concluſerunt, quâm 5 ad 4; at contrà, 4 ad 5 majorem habere rationem quàm 4 ad 7. Similiter de aliis minutiis argumentando, cum facile caperent, minutiam $\frac{4}{6}$ majorem eſſe minutiâ $\frac{3}{6}$; contrà autem minutiam $\frac{6}{3}$ majorem eſſe minutiâ $\frac{6}{4}$: definivére, 4 ad 6 majorem rationem habere quàm 3 ad 6; ſed revertendo, majorem eſſe rationem $\frac{6}{3}$ ratione $\frac{6}{4}$. Sic minutiam $\frac{4}{3}$ majorem cum perſpicerent minutiâ $\frac{2}{3}$; contrà autem, minutiam $\frac{3}{2}$ majorem minutiâ $\frac{3}{4}$: ſtatuebant 4 ad 3 majorem rationem habere quâm 2 ad 3; ſed revertendo, 3 ad 2 in majori ratione eſſe quàm 3 ad 4. Cum igitur in omnibus tribus caſibus iſtud verum, ex minutiis Arithmeticis, ſe deprehendiſſe putarent, generalem inde propoſitionem, hanc octavam, fabricarunt, & ex alio falſo principio, ex ſeptima nempe ejuſdem libri definitione, demonſtrarunt. Hæc antem ut clarius

inſpiciantur, accurate hîc exponam, in quibus minutiæ cum rationibus paria faciant; & in quibus inter ſe diſcrepent. Nam & Geometricæ conſiderationis ſunt minutiæ, quatenus ex duobus terminis, uti rationes, conſtant; qui quocunque numero multiplicati, eandem minutiam, eandemque rationem exhibent. quippe ut ratio $\frac{3}{2}$ eadem eſt quæ ratio $\frac{6}{4}$, vel $\frac{9}{6}$; ſic minutia $\frac{3}{2}$ tanta eſt, quanta minutia $\frac{6}{4}$, vel $\frac{9}{6}$, vel $\frac{72}{48}$. Unde & hoc planum eſt, minutiæ quantitatem; quatenus aliâ minutiâ ejuſdem generis, aut exceſsivi aut defectivi, major eſt, aut minor, aut illi æqualis; æque ac rationis quantitatem, qua aliâ ratione ejuſdem generis, aut exceſsivi aut defectivi, major eſt, aut minor, aut illi æqualis; ex eodem principio eſſe definiendam, ex majore nimirum, aut minore, aut etiam æquali terminorum inter ſe diſtantia, ſi utraque comparatarum aut rationum, aut minutiarum, ejuſdem generis exiſtens, aut exceſsivi, aut defectivi, ad eundem prius vel antecedentem, vel conſequentem fuerit reducta. Quod ſi una comparatarum rationum, aut minutiarum, exceſsiva ſit, altera defectiva; in principiis ſupra monſtratum eſt, & poſtea amplius monſtrabitur, illam in ſuo genere majorem eſſe, quæ longius à nihili ratione, aut minutia, diſtat: adeoque duas rationes, aut minutias, iiſdem terminis comprehenſas, hoc eſt, exceſsivam & cognominem defectivam, tanquam æque à nihili ratione, ſed in diverſas partes, diſtantes, æquales exiſtere; minutias quidem, quatenus Geometricè earum termini conſiderantur. quomodo ratio exceſsiva $\frac{2}{1}$ æqualis eſt cognomini defectivæ $\frac{1}{2}$.

Item excessiva $\frac{5}{3}$, cognomini defectivæ $\frac{3}{5}$. & excessiva $\frac{7}{4}$, æqualis cognomini defectivæ $\frac{4}{7}$. Rursus in eo rationes & minutiæ inter se discrepant, quod rationis duo termini unam duntaxat notionem ingerant, spatium nempe inter utrumque terminum interjectum, quod plurium, aut pauciorum minorum rationum capax est, prout major, minorve ratio fuerit. Minutiæ autem duo termini duas notiones includunt; numeratoris à denominatore distantiam, & partium denominatoris numerationem. Quamobrem secundum Geometriam ratio $\frac{6}{4}$ æqualis est duabus rationibus $\frac{6}{5}$ & $\frac{5}{4}$: at minutia $\frac{6}{4}$, secundum Arithmeticam, æqualis est duabus minutiis $\frac{5}{4}$ & $\frac{1}{4}$, quæ, quòd eundem denominatorem sortitæ sunt, eam inter se rationem habent, quam numeratores, nempe quintuplam. Atque hinc quoque est, quòd omnes minutiæ inter se sint commensurabiles; cum contra diversi fundi rationes, nullam communem mensuram admittant, ideoque nec rationem inter se habeant effabilem. Unde porro liquet, rationum ac minutiarum diversam esse additionem, & consequenter subtractionem. Præterea minutias, ob denominatoris illam numerationem, per numeros multiplicari posse, ac dividi; rationes verò nequaquam. Cum igitur duæ sint minutiarum considerationes, Geometrica & Arithmetica; ex priore, sed à veteribus non animadversa, veram proferimus propositionem octavam; cum ex posteriore antiqui effinxerint falsam. Verum enim est, Geometrice consideratis minutiarum terminis, secundum distantiam antecedentis, seu numeratoris, à consequente, seu

denominatore, qui semper integrum denotat, 7 supra 4, tanquam integrum, tanto spatio Geometrico adscendere, quanto spatio 4 infra 7, tanquam integrum descendit. Ambæ enim rationes, $\frac{7}{4}$ & $\frac{4}{7}$, quæ æqualibus terminis fundanis comprehenduntur, à nihili ratione, in diversas partes, æquidistant; nempe per rationem $\frac{7}{4}$, quæ nihili rationi $\frac{4}{4}$ addita, excessivam $\frac{7}{4}$ efficit; & ab eodem nihili ratione $\frac{4}{4}$ ablata, defectivam $\frac{4}{7}$. quod ex iisdem rationibus, ad eundem consequentem reductis, sic adparet: $\frac{49}{28}$. $\frac{28}{28}$. $\frac{16}{28}$. Quare 7 ad 4 eandem rationem habet quam 4 ad 7: rursus 5 ad 4 eandem rationem habet quam 4 ad 5: quod excessiva ratio $\frac{7}{4}$, seu $\frac{49}{28}$, æqualis sit cognomini defectivæ $\frac{4}{7}$, seu $\frac{16}{28}$: & ratio excessiva $\frac{5}{4}$, seu $\frac{25}{20}$, æqualis cognomini defectivæ $\frac{4}{5}$, seu $\frac{16}{20}$. Ideoque, si ratio $\frac{7}{4}$ major est ratione $\frac{5}{4}$; seu, quod idem est, si ratio $\frac{5}{4}$ minor est ratione $\frac{7}{4}$; etiam revertendo, ratio $\frac{4}{5}$ minor est ratione $\frac{4}{7}$. Quod octavæ propositioni Euclidis adversatur, qui ex Arithmetica minutiarum consideratione, quatenus partes integri numerantur, falsum istud theorema fabricavit; nempe rationem $\frac{7}{4}$ majorem quidem esse ratione $\frac{5}{4}$; at contrà rationem $\frac{4}{5}$ majorem esse ratione $\frac{4}{7}$, ob causam Arithmeticam ante relatam. Ex priore igitur minutiarum vera consideratione, nempe Geometrica, quà ex numeratoris à denominatore distantia, quantitas ipsarum, æque ac rationum, definitur, octava propositio fuisset effingenda; non autem ex posteriore minutiarum consideratione, nempe Arithmetica, falsitas in Geometriam invehenda, propositionem Geometricam ex principio Arithmetico fabricando,

Quare novum illud Euthymii theorema, non minus in Arithmetica locum habebit, quàm in Geometria. Etenim ſcite hîc contemplabimur, minutiam exceſsivam tantà ratione ſuperare minutiam nihili, ſeu integram, quantà ratione eadem hæc minutia nihili ſuperat exceſsivæ cognominem defectivam. Tres enim partes minutiæ exceſsivæ $\frac{3}{2}$ ſuperant duas partes minutiæ integræ, ratione ſeſquialtera, ſeu ſuperdimidia: tres autem partes minutiæ integræ ſuperant duas partes minutiæ defectivæ, ratione item ſeſquialtera. Unde minutia exceſsiva $\frac{3}{2}$ ſuperat minutiam defectivam $\frac{2}{3}$, ratione biſſeſquialtera, ſeu dupla & ſuperoctâva, in his terminis: $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{3}$. $\frac{2}{3}$. ſeu $\frac{9}{6}$. $\frac{6}{6}$. $\frac{4}{6}$. ſeu, $\frac{72}{48}$. $\frac{48}{48}$. $\frac{32}{48}$. quippe tres dimidii imperiales nummi, ſeu 72 ſolidi Lubecenſes, ſuperant ſui tertia parte integrum imperialem, ſeu 48 ſolidos, uti integer imperialis, ſeu 48 ſolidi, ſui tertia parte ſuperant duos imperialis trientes, ſeu ſolidos 32. Similiter minutia exceſsiva $\frac{4}{3}$ quanto ſpatio ſuperat minutiam nihili, tanto ſpatio minutia nihili ſuperat cognominem defectivam $\frac{3}{4}$: adeoque exceſsiva $\frac{4}{3}$ ſuperat defectivam $\frac{3}{4}$ ratione dupla minus ſuperoctava, in his terminis, $\frac{16}{12}$. $\frac{12}{12}$. $\frac{9}{12}$. ſeu, in imperialis minutiis, $\frac{64}{48}$. $\frac{48}{48}$. $\frac{36}{48}$. Porro uti major eſt minutia exceſsiva $\frac{3}{2}$ ſeu $\frac{72}{48}$, quàm minutia exceſsiva $\frac{4}{3}$, ſeu $\frac{64}{48}$, ob majorem minoremque numeratorum 72 & 64, ſupra integrum 48 adſcenſum; ſic major eſt minutia defectiva $\frac{2}{3}$, ſeu $\frac{32}{48}$, quàm minutia defectiva $\frac{3}{4}$, ſeu $\frac{36}{48}$. hoc eſt, minutia $\frac{32}{48}$ majus minus eſt quàm minutia $\frac{36}{48}$, quia hæc $\frac{36}{48}$ minus diſtat ab integro $\frac{48}{48}$, quàm illa $\frac{32}{48}$. Ex quibus omnibus planum eſt, ſi duæ defectivæ, vel rationes,

vel minutiæ, inter ſe ſecundum quantitatem comparentur, eandem hanc eſſe comparationem, quæ inter illas cognomines duas exceſsivas. Cæterum omnes hæc ratiocinatio, quâ Euclidéi theorematis falſitatem demonſtramus, paucis verbis includi poteſt. Quoniam enim ratio $\frac{7}{4}$ major eſt quàm ratio $\frac{5}{4}$, quod in iſta 7 ſupra 4 majori ſpatio adſcendat quàm 5 ſupra eundem 4; idcirco & ratio $\frac{4}{7}$ major eſt quàm ratio $\frac{4}{5}$, quod 4 infra 7 magis deſcendat quàm infra 5. Nunc ad alterum veniemus Euclidéæ demonſtrationis fundamentum, cui, ut firmiſsimo, hanc propoſitionem ſuperſtruendam cenſuit; nempe ad definitionem quinti libri ſeptimam, quæ paginâ 30. v. 4 eſt relata, & à Scholiaſte explicata paginâ 28, ad ejuſdem libri definitionem quintam. Hanc verò definitionem Euclidis diagrammati, quod paginâ 32 poſitum eſt, & paulo ánte in numeris adductum, adcommodabimus. Sunt autem in omni caſu octavæ propoſitionis, potentiâ quatuor magnitudines; quandoquidem duæ rationes inter ſe ſecundum quantitatem ipſarum comparantur. quod & recte monitum à Scholiaſte pagina 35. v. 30. Cæterum in numeris iſtis primus terminus eſt 7. ſecundus, 4. tertius, 5. quartus iterum 4. Si jam ſumamus primi & tertii æque multiplos, in adducto diagrammate, triplos, 21 & 15: rurſus ſecundi & quarti æque multiplos, hîc quadruplos, 16 & 16: videmus primi multiplum, 21, ſuperare multiplum ſecundi, 16; at tertii multiplum, 15, non ſuperare multiplum quarti, 16. Ex qua veriſsima concluſione Euclides falſiſsimam, uti Euthymius cenſet, deduxit, nempe hanc

ob causam primum terminum 7, ad secundum 4, majorem rationem habere quàm tertium terminum 5, ad quartum 4. EUCL. Hoc certe immotum octavæ propositionis fundamentum statuo, quod non nisi cum omnium tuorum principiorum ruina movebis. Videamus verò quam demonstrationem contrà adferre posis. HERMOT. Qui præcedentis probationis falsitatem, inquiebat Euthymius, perspexit, jam hujus definitionis fallaciam ex principio demonstratam habet. Attamen ut majori certitudine omnia clarescant, novum adhuc quoddam nostrum de rationibus Geometricis inventum tibi non invidebo, ex quo; si quid tamen certi à mortalibus comprehenditur; evidentissimam doctrinam de rationum magnitudinibus explorandis hauries. Cum igitur ratio nihili sit rationum omnium, excessivarum & defectivarum, fundamentum & principium; uti siphra, seu numerus nullus, quem ita signamus, o, principium est omnium numerorum absolutorum, excessivorum & defectivorum; si rationis nihili antecedentem terminum multiplicem, exempli gratiâ, per 4, addo rationi nihili rationem quadruplam; adeo ut ratio ex ratione nihili, & additâ ratione quadruplâ composita, sit ratio quadrupla, in his terminis, 4. 1. 1. Sin consequentem nihili rationis terminum multiplicem per eundem numerum 4, aufero à nihili ratione rationem quadruplam; adeo ut ratio ex nihili ratione, & ablatâ ratione quadruplâ composita, sit subquadrupla. Distant igitur æquali spatio à ratione nihili, ratio quadrupla, & ratio subquadrupla; seu excessiva quadrupla,

& cognominis defectiva; in diversas tamen partes. Plane uti, si nihilo addam 4, & à nihilo 4 auferam, uterque numerus æque à nihilo distat, sed in partes diversas. Similiter si vel in orientem ab urbe quatuor milliarium iter faciam, vel quatuor milliarium iter in occidentem, æquali itinere, utrovis loco consistendo, ab urbe absum. Præterea tanto spatio ad dextram ab aliquo distare possum, quanto alius ad sinistram. Aufero autem nostri respectu, qui excessivas illas rationes facimus, quarum antecedentes consequentibus sunt majores: adderem autem illorum respectu, qui à nihili ratione nobis quidem deficiunt, sibi autem contrà majore item antecedentis & consequentis distantia, excrescunt, & majores fiunt. Certissimis his, ex ipsa rerum natura petitis principiis, omnis nostra ratiocinatio adversus falsa Euclidis principia, & non satis considerate adsumta, statuminatur. Addo igitur, nostri respectu, cujusvis generis rationis, aut excessivi, aut defectivi, antecedentem per quemvis numerum multiplicando; consequentem autem cujusvis generis rationis, aut excessivi, aut defectivi, per quemvis numerum multiplicando, nostri respectu aufero. Quare si per eundem numerum, antecedens & consequens cujusvis rationis multiplicentur, eadem ratio manet; quod, quantum addo, tantum & auferam; &, dum primus terminus per multiplicationem adscendit, adscendendo quoque per multiplicationem sequatur terminus secundus. Porro uti excessivæ rationes per antecedentium terminorum majorem multiplicationem quàm consequentium, à nihili ratione adscen-

derunt; sic defectivæ rationes per majorem consequentium terminorum multiplicationem quàm antecedentium, infra nihili rationem descenderunt. Ratio igitur sesquialtera, $\frac{3}{2}$, est ratio tripla, minuta ratione duplâ. Multiplicando enim nihili rationis $\frac{1}{1}$ antecedentem per 3, addo rationi nihili rationem triplam; at consequentem nihili rationis multiplicando per 2, aufero à tripla ratione rationem duplam. Quod si jam compensetur tripla ratio, addita, cum dupla ratione, ablatâ, residua est triplæ & duplæ differentialis ratio, nempe sescupla. Rursus ratio subsupertertia, $\frac{3}{4}$, est ratio tripla, minuta ratione quadruplâ. Quoniam enim multiplicando nihili rationis antecedentem per 3, addo nihili rationi rationem triplam; consequentem autem nihili rationis per 4 multiplicando, à tripla ratione aufero quadruplam; planum est, quandoquidem plus aufero quàm addidi, infra nihili rationem fore quæ compensatâ utrâque relinquitur, rationem nempe subsupertertiam, quæ subtriplæ & subquadruplæ differentialis ratio existit. Atque hinc subtractionis doctrina claram lucem accipit. Si enim à ratione $\frac{2}{1}$ auferre velim rationem $\frac{3}{2}$, antecedentes inter se multiplicando & consequentes, prius invertendi sunt rationis auferendæ, $\frac{3}{2}$, termini, hoc modo, $\frac{2}{3}$. Multiplicando deinde rationis $\frac{2}{1}$ antecedentem per 2, addo ipsi rationem duplam; adeo ut, cum antea quoque adesset ratio dupla, jam inde facta sit ratio quadrupla, in his terminis, 4. 2. 1: at rationis $\frac{2}{1}$ consequentem multiplicando per 3, aufero à ratione quadrupla triplam: quæ conjunctim his terminis exponimus, 4. 2. 1. 3. Quod si jam

compenſentur quadrupla & tripla, reſidua eſt earundem differentialis ratio, ſupertertia. Cæterum rationis $\frac{7}{4}$ antecedentem 7 multiplicando per 3, addo rationi $\frac{7}{4}$ rationem triplam, ſic 21. 7. 4 : at ejuſdem rationis $\frac{7}{4}$ conſequentem 4, multiplicando per 4, aufero à ratione $\frac{21}{4}$, rationem quadruplam, in his terminis, 21. 7. 4. 16. Quoniam autem ablatæ quadruplæ rationis ſupra additam triplam exceſſus, nempe ratio $\frac{4}{3}$, non eſt tanta, quanta eſt primitiva ratio $\frac{7}{4}$, ideo reſidua eſt ratio exceſsiva, $\frac{21}{16}$. Rurſus, rationis $\frac{5}{4}$ antecedentem 5 multiplicando item per 3, addo rationi $\frac{5}{4}$ rationem triplam, in his terminis, 15. 5. 4: ſed conſequentem 4 multiplicando per 4, aufero à ratione $\frac{15}{4}$ rationem quadruplam. quæ conjunctim his terminis exponuntur, 15. 5. 4. 16. Quoniam autem ablatæ quadruplæ rationis ſupra additam triplam exceſſus, nempe ratio $\frac{4}{3}$, major eſt quàm primitiva ratio $\frac{5}{4}$; igitur ambabus compenſatis ratio exurgit defectiva, nempe $\frac{15}{16}$. Seu, ratio ablata adſcendit ſupra rationem additam. ideoque ex primitiva ratione $\frac{5}{4}$, exceſsivâ, facta eſt, per majorem ablationem quàm additionem, defectiva $\frac{15}{16}$. Certiſsimum ergo eſt, majorem eſſe rationem $\frac{7}{4}$ quàm ſit ratio $\frac{5}{4}$; quoniam, dum utrique eadem addita eſt, & eadem ab utraque ablata, majorem reſiduam reliquit ratio $\frac{7}{4}$ quàm ratio $\frac{5}{4}$: illa, rationem $\frac{21}{16}$; hæc, ne quidem nihili rationem, ſed defectivam $\frac{15}{16}$. Verum enimvero hinc colligi nequit, 7 ad 4 majorem rationem habere quàm 5 ad 4: quandoquidem ſi tripla utrique addatur, & rurſus quintupla ab utraque auferatur, reſiduæ ſunt rationes $\frac{21}{20}$ & $\frac{15}{20}$. quarum hæc $\frac{15}{20}$, in genere defectivo

major eſt quàm illa, $\frac{21}{20}$ in genere exceſsivo. Ex his autem omnibus illud primum conſtat, octavam propoſitionem, dum per ſeptimam definitionem, hoc eſt, per multipla, probatur, demonſtrari per rationum additionem & ſubtractionem. Quod quidem idem eſt, ac ſi quis, probaturus numerum 8 majorem eſſe numero 7, addat utrique eundum numerum, ut 4; unde conſurgunt 12 & 11; rurſus autem eundem numerum ab iis auferat, nempe 10. unde à priore reſiduus eſt 2, à poſteriore autem 1: denique hinc colligat, 8 majorem eſſe quàm 7. Quem certe demonſtrandi modum, ſi quid divini luminis vobis ſupereſt, ineptum judicabitis. quando quidem, qui abſque demonſtratione, naturali lumine, non comprehendit numerum 8 majorem eſſe numero 7, totum nempe ſua parte, nec abſque demonſtratione credet binarium eſſe majorem unitate. Omnes autem homines totum quavis ſua parte majus eſſe, communi notione percipiunt; ſeu, majus eſſe, quod longius ab initio ſuo, hoc eſt, à nihilo diſtat: id quod Euthymius principii loco adſumit. Deinde, niſi reſiduæ rationes utræque ſint exceſsivæ, falſum illud octavum theorema hinc enaſcitur. Uti enim, ſi à 12 & 10 auferam 11, reſidui ſunt + 1 & − 1, qui inter ſe æquales exiſtunt, ſed alter exceſsivus, alter defectivus: Sic ſi à rationibus $\frac{16}{8}$ & $\frac{9}{8}$ auferam rationem $\frac{3}{2}$, reſiduæ ſunt rationes $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{4}$, inter ſe æquales; ſed una exceſsiva eſt, altera defectiva. Apol. Ultima hæc Euthymii doctrinam valde confirmant. attamen non ſatis adſequor, cur non Euclidis quoque conſiderandi modus retineri poſsit. Si enim miſtum nihili $\frac{4}{4}$, omni defectivo,

adeoque misto $\frac{37}{42}$, & innumeris aliis, etiam ex Euthymii ſententia (paginâ 112) fortius, adeoque majus eſt, certe pronunciare poſſumus, 4 ad 4 majorem rationem habere quàm 3 ad 4. Rurſus, quia miſtum $\frac{37}{42}$ majus eſt miſto $\frac{27}{42}$, dicemus 3 ad 4 majorem rationem habere quam 2 ad 4. Ita enim & in exceſsivis, & defectivis, ut Euthymius vocat, rationibus, eodem modo, ſine ulla mentis turbatione, majorem terminorum inter ſe rationem, ex majore ratione, id eſt, ex ea, quæ minus ab exceſsiva majore ratione diſtat, ubique definiemus. Ideoque ſubtilitates meræ potius mihi videntur, quæ hîc diſſeruit Hermotimus, quàm ut utilia cenſeri poſsint, nedum ut neceſſariò in Geometriam ſint recipienda. ARCHIM. Certè non ſatis adſecutus es, ô Apolloni, cur Euthymii rationes conſiderandi modus fundamentum in natura habeat, Euclidis autem illo deſtituatur. Primum enim, quoniam ratio $\frac{4}{3}$, exempli causâ, æque diſtat à ratione nihili, atque ab hac ratione nihili diſtat ratio $\frac{3}{4}$; uti à nihilo æque diſtant $+1$ & -1; admodum concinne, & rerum naturæ convenienter, dicemus, illas duas rationes, iiſdem terminis comprehenſas, æquales exiſtere; uti numeri 1 & 1 inter ſe ſunt æquales; unam autem tanto ſpatio ſupra nihili rationem adſcendere, quanto infra nihili rationem deſcendit altera: plane uti exceſsiva unitas tanto intervallo nihilum ſuperat, quanto defectiva unitas à nihilo deficit. Quare ſicut duæ exceſsivæ rationes, $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{2}$ compoſitæ, utravis componentium majorem exceſsivam rationem faciunt, nempe $\frac{3}{1}$; ita compoſitæ duæ defectivæ, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, utravis componentium ma-

jorem defectivam rationem, $\frac{2}{3}$, exhibent. Nec illud te turbare potuisset, quod de mistorum viribus concinne proposuit Hermotimus, si vim totius ratiocinationis profunde inspexisses. Omnium enim rationum, excessivarum & defectivarum, minima est ratio nihili. Cum ergo ratio nihili $\frac{4}{4}$ omni alia excessiva ratione minor sit, etiam ex Euclidis sententia, constat excessivarum rationum nullam propiorem esse finibus defectivarum rationum; ideoque mistum $\frac{44}{44}$ omni excessivo misto esse debilius. Rursus cum ratio nihili $\frac{4}{4}$ omni alia defectiva ratione quoque minor sit, (quoniam minime est defectiva, magis autem defectiva est ratio $\frac{3}{4}$, & hac magis defectiva ratio $\frac{2}{4}$; sicut -2 major defectivus numerus est quàm -1; & -3 adhuc major defectivus numerus quàm -2, & sic deinceps) planum est, defectivarum rationum nullam propiorem esse finibus excessivarum rationum; ideoque mistum $\frac{44}{44}$ omni defectivo misto esse fortius. Quæ quidem, si quid de his percipio, & Geometriam in rationum contemplatione faciliorem reddunt, & Arithmeticam quoque in doctrina de minutiis. Quid enim, rogo vos, ô eximii mathematici, clarius docetur, quid concinnius, quàm quod rationum omnium quasi centrum sit ratio nihili, supra quam innumeræ rationes, magnæ, parvæ, tanquam diversorum circulorum radii, adsurgunt; sicut infra illam, ejusdem magnitudinis, quasi radii, aliæ deprimuntur? Cum autem excessiva ratio sit, cujus antecedens consequente major est, quanto spatio hæc supra, quasi centrum suum, rationem nihili, elevatur, tanto infra hanc deprimitur

cognominis ratio defectiva, cujus antecedens consequente est minor. adeoque unâ cognitâ, nota quoque est altera, & simul spatium inter utramque interceptum; seu, illarum differentia. Namque ratio sesquialtera à ratione subsesquialtera distat, ratione bis sesquialterâ; quia nempe tanto spatio infra nihili rationem descendit ratio subsesquialtera, quanto supra illam adscendit ratio sesquialtera. Quod significanter admodum, & toti doctrinæ suæ concinne Euthymius enunciat, rationem nempe sesquialteram excessivam, superare rationem sesquialteram defectivam, ratione bis sesquialterâ. Quanto igitur excessiva quædam ratio major est, hoc est, altius supra nihili rationem adscendit; tanto quoque major est cognominis defectiva, hoc est, altius infra nihili rationem descendit. Quare cum continuâ serie octies ratio $\frac{3}{2}$ aufertur à ratione excessiva $\frac{81}{16}$, postquam quater ablata est, ventum est ad rationem nihili, quarto gradu infra rationem $\frac{81}{16}$ sitam; postquam rursus quater à ratione nihili ablata est ratio $\frac{3}{2}$, deventum est quarto gradu, nostri respectu, infra rationem nihili, ad rationem $\frac{16}{81}$ defectivam. Atque hinc Euthymianæ adsertionis veritas deducitur, rationem scilicet $\frac{4}{9}$ majorem esse ratione $\frac{6}{9}$, adeoque 4 ad 9 majorem rationem habere quàm 6 ad 9; quod hæ duæ rationes, $\frac{4}{9}$ & $\frac{6}{9}$, ab excessiva, ut à ratione $\frac{27}{8}$, ablatæ, $\frac{4}{9}$ tanquam major, minorem residuam rationem exhibeat, nempe $\frac{6}{4}$, quàm minor $\frac{6}{9}$, quæ residuam facit $\frac{9}{4}$. Sicut in mere excessivis rationibus, ratio $\frac{4}{1}$ major est ratione $\frac{3}{1}$, quia si utraque à ratione $\frac{8}{1}$ auferatur, illa minorem relinquit, hæc majorem. Idem quoque ex additione

fit manifeſtum. Omnium autem conſonantiſsima huic doctrinæ exempla Harmonice ſuppeditat. Homophonum enim, ſeu uniſonum, duæ chordæ, in ratione nihili tentæ, ſonant. Quod ſi harum chordarum altera in ſeſcupla ratione tentior ſit alterutrâ quæ uniſonum edunt, exceſsivam rationem, adeoque conſonantiam audiemus, dia pente intenſum: ſin illarum chordarum altera in ſeſquialtera ratione remiſsior ſit alterutrâ quæ uniſonum edunt, defectivam rationem, adeoque conſonantiam, audiemus, dia pente remiſſum. Quanto igitur ſpatio exceſsiva conſonantia dia pente, ſupra nihili conſonantiam, ſeu uniſonum, adſcendit, tanto ſpatio defectiva conſonantia dia pente infra nihili conſonantiam deſcendit. Utræque autem dis dia pente intervallo inter ſe diſtant. De minutiis ſimiliter ratiocinamur. quippe minutia $\frac{4}{3}$ tanta ratione integrum, nihili ratione comprehenſum, ſuperat, quanta ratione minutia $\frac{3}{4}$ ab integro deficit, hoc eſt, quanta ratione integrum ſuperat minutiam $\frac{3}{4}$. Quanta autem ratione minutia $\frac{6}{3}$ major eſt quàm minutia $\frac{4}{3}$, tanta ratione minor eſt cognominis defectiva $\frac{3}{6}$ quàm defectiva cognominis $\frac{3}{4}$. quia major defectiva, majorem ab integro diſtantiam infert. Porro exceſsiva minutia $\frac{6}{3}$ ſuperat minutiam defectivam $\frac{3}{6}$, ratione quadrupla: exceſsiva autem minutia $\frac{4}{3}$ ſuperat cognominem defectivam $\frac{3}{4}$, ratione bis ſupertertia, ſeu, ratione duplâ, minutâ ratione ſuperoctavâ. Hæc contemplatio in rerum natura fundata eſt, cum veterum, adeoque Euclidis, & quondam noſtra, omni fundamento, ſi verum fateri velimus, careat. Minutiarum autem

consideratione deceptos fuisse antiquos, ingeniose vidit Euthymius. quippe in excessivis rationibus, & minutiis, eadem veritas omnibus seculis constitit. Cæterum facilè quoque ex istis colligitur, diversi generis rationes, excessivam & defectivam, inter se, quatenus una alterâ major est, aut minor, comparari non posse; quod comparatio ejusdem generis nomina requirat: quippe eodem circo, eandem versus metam decertant, quorum celeritatis inter ipsos expenditur. & divites cum divitibus comparantur, debitores cum debitoribus. Qvare Lucius, qui tria millia in bonis habet, comparari nequit cum Titio, qui quatuor millia debet; quod hic plura debeat, quàm ille possidet; sed bene Lucius cum Mævio, qui duo millia possidet, comparabitur, & Titius cum Sejo, qui sex millia debet. Similiter, si hi quatuor, Lucius, Mævius; Titius, Sejus, in centro terræ consisterent; suscepto autem itinere Lucius adscendendo tria milliaria emetiretur, dum Mævius duo; quod uterque adscendat, & ad easdem superas auras evadere conetur, hi bini inter se comparari possunt, ita ut Lucius Mævio in sesquialtera ratione celerius adscendere dicatur. Rursus autem Titius, si descendendo tria milliaria emetiatur, dum Sejus duo; quod uterque descendat, adeoque ad eundem tendat scopum, hi bini quoque inter se comparabuntur. Sed Lucius qui adscendit, non respicit Titium qui descendit, etiamsi sciat, se adscendendo non fuisse celeriorem quàm ille fuerit descendendo; quod in nullam comparationem cum ipso veniat. At verò si uterque adscendisset, Lucius comitem habuisset Titium,

ideoque, ob parem celeritatem, nihili rationis comparationem incurrissent. Excessus igitur & defectus inter se secundum quantitatem, hoc est, distantiam à nihilo, non comparantur; quod non ab una & eadem parte nihili processerint. Porro ut excessus defectui æqualis esse potest, aut eo major, aut etiam minor; & vicissim; similiter de rationibus definiemus. Excessiva enim ratio $\frac{4}{3}$ tanta est in suo genere, quanta in suo genere defectiva ratio $\frac{3}{4}$. Nec fictio hîc quidquam potest, de qua ante (pag. 113.) Hermotimus. Fingatur enim nihili esse ratio, ratio $\frac{3}{4}$, quam supertertia ratione vincat ratio $\frac{3}{3}$, unitatis loco ponenda; hanc rursus supertertia ratione superet ratio $\frac{4}{3}$, quæ propterea est præcedentis $\frac{3}{3}$ dupla: non tamen magnitudines, aut termini, qui rationes comprehendunt, & mutuo respectu faciunt, hac fictione mutantur. Hæc omnia cum considero, non possum non in Euthymii sententiam ire, qui octavam propositionem falsam censet. Quod in tribus casibus præcipuis, brevitatis, puto, causa, ante probavit Hermotimus. Sunt autem in universum casus quinque. Aut enim tertia D utrique reliquarum æqualis est, aut inæqualis. Si æqualis, aut majori æqualis est, aut minori: sin inæqualis, aut utrâque minor est, aut major; aut majore quidem minor, minore autem major. Quos casus si Hermotimi ordine numeris exponamus, erit I.[mus] $\frac{7}{4}$. $\frac{5}{4}$. II. $\frac{4}{6}$. $\frac{3}{6}$. III. $\frac{4}{3}$. $\frac{2}{3}$. IV. $\frac{7}{7}$. $\frac{5}{7}$. V. $\frac{7}{5}$. $\frac{5}{5}$. Horum duo, primus & quintus, ad octavæ propositionis primum membrum expensi, veri sunt; sed ad secundum quoque, revertendo, falsi. Duo autem, secundus & quartus, contrà ad primum membrum

examinati, falsi sunt; sed revertendo, veri. Tertius casus spurius est, nec comparationem admittit. Nullo itaquo casu tota octava propositio vera invenitur. Decima autem propositio cum octava, cui, ut fundamento, superstructa est, corruit. Quod demonstrare instituit Hermotimus. Porro novam propositionem, & Euclidéâ generaliorem, quatuor istis casibus convenientem, ex Euthymii principiis hanc efformamus. *Duarum inæqualium magnitudinum illa, ad eandem, utrâque aut majorem, aut minorem, aut alterutri æqualem, majorem rationem habet, quæ longius ab hac distat: & vicissim.* Atque hæc breviter, ad Euthymii, ni fallor, mentem hîc disserui, ut quæ mea de his novis inventis sententia sit, omnes cognosceretis. EUCL. Et judicii tui perspicacitate, & doctrinæ ipsius, undecunque confirmatæ, evidentia adducimur, ut in hac causa victi circinum & regulam Euthymio tradamus. HERMOT. Gloriosa verò victoria, ingeniosissimis adversariis extorta. Tuo autem, ô divine Archimedes, judicio adprobatam esse hanc doctrinam, tua voce defensam, hoc verò est, æternæ veritatis monumentis à summo geometra illam esse insertam. Nunc ad ea pergam, quæ in Scholiaste, & in vestris propositionibus, notavit Euthymius. ARCHIM. Superfluus iste labor erit, quòd nunc ipsi illa corrigere sciamus. HERMOT. Illa quoque, si pateris, referam, ut & cæteri magis ac magis in hac nova doctrina confirmentur. Scholiastes igitur in quintæ & septimæ definitionis explicatione, quam pag. 28 retuli, Euclidéâ probandi methodo relictâ, ineptè aliam confinxit. Euclides enim

primæ & tertiæ magnitudinis æque multiplas ſumendo, utrique rationi eandem rationem addit; ſed & ſecundæ & quartæ æque multiplas ſumendo, eandem rationem ab utraque aufert. Scholiaſtes autem, decuſſatim antecedentes multiplicans per conſequentes, ex parte vulgarem methodum ſequitur, & optimam, quæ conſequentes inter ſe multiplicandas tradit, & decuſſatim antecedentes per conſequentes: quomodo utraque ratio tantâ ratione augetur, quanta minuitur, & quod in primis fieri debebat, ad eandem conſequentem reducitur: at ſecundæ & quartæ æque multiplas ſumens; quartæ autem multiplam utriuſque rationis conſequentem faciens, utrique propoſitæ rationi addit rationem ſecundæ ad tertiam. Quod in exemplis ipſius, quæ numeris, expoſuit, clare perſpicitur. quorum primo, ad quintam definitionem pertinente, explorat num hæ duæ rationes, $\frac{12}{6}.\frac{8}{4}$ inter ſe ſint æquales. Cum igitur non ſolum tertium, ſed & quartum termiuum per ſecundum multiplicare deberet, contrà ſecundum & quartum multiplicat per tertium, hoc eſt, rationi tertii ad quartum addit rationem ſecundi ad tertium, in his terminis, 6. 8. 4. ſeu in iſtis multiplis, 48. 64. 32. unde hæ duæ rationes ſeſquialteræ procreantur, $\frac{48}{32}.\frac{48}{32}$, cum ſecundum inceptam methodum deberent eſſe duæ in ratione dupla, in qua primitivæ $\frac{12}{6}.\frac{8}{4}$ ſpectantur. Rurſus exploraturus, utra harum rationum $\frac{10}{4}.\frac{6}{3}$ major ſit, quod ſeptima definitione fecit Euclides, eadem methodo rationi $\frac{6}{3}$ addit rationem $\frac{4}{6}$, hoc eſt, utramque primitivam rationem minuit ratione ſeſquialterâ, in his terminis, $\frac{30}{18}.\frac{24}{18}$. Idem autem

eſt tertius modus, cum prima ratio minor eſt ſecundâ, in hoc exemplo, $\frac{12}{7}$. $\frac{18}{9}$. quarum termini iſtâ methodo multiplicati, ſunt, $\frac{108}{162}$. $\frac{126}{162}$. Primitivis itaque rationibus addit rationem ſecundi ad tertium: ac ſi quantitates exploraret rationum, $\frac{12}{8}$. $\frac{6}{4}$. | $\frac{10}{6}$. $\frac{4}{3}$. | $\frac{12}{8}$. $\frac{7}{9}$. Unde liquet parvi momenti eſſe hoc ſcholium. Nunc tua quædam, ô Archimedes, & Eutocii in illa commentarium, examinabo. Illud autem primum de ſecunda propoſitione libri primi de Sphæra & Cylindro ſum moniturus, male, tum in Baſileenſi editione, tum in Rivaltiana, diagramma hujus propoſitionis eſſe deformatum. Cum enim hoc ſolùm requiratur, ut A H ſit primò major quàm D; (uti ex tota demonſtratione patet, & v. 22.) quomodo in ipſorum quoque diagrammatis punctum H caderet intra B A; illi ſiniſtre putarunt, ipſam CH debere eſſe majorem quàm D. Ter igitur in noſtro diagrammate compoſita A C, facit magnitudinem AH, primò majorem; quod quoque in demonſtranda octava quinti Euclides duntaxat voluit; magnitudine D. Cæterum paralogiſmus hîc in demonſtrando eſt v. 24. quippe C A ad A H majorem rationem habet quàm A C ad CB. hoc eſt, 4 ad 12 non minorem rationem habet quàm 4 ad 10; quod ex Euclidis octava adſumſit Archimedes; ſed majorem, ob terminorum 4 & 12 majorem inter ſe diſtantiam, quàm terminorum 4 & 10, qui duas rationes defectivas faciunt. Verum tamen eſt, componenti EF ad FG, ſeu 12 ad 9, minorem rationem habere quàm AB ad BC, ſeu 14 ad 10. Quod cum mirum videri poſsit, numeris clare hîc exponam.

Reducantur enim rationes defectivæ, $\frac{4}{12}$. $\frac{4}{10}$, ad alias eundem consequentem habentes, $\frac{5}{15}$. $\frac{6}{15}$. Harum termini antecedentes, 5 & 6, unitate inter se distant, quæ facit differentialem rationem $\frac{5}{6}$, quâ major defectiva $\frac{5}{15}$ superat minorem $\frac{6}{15}$. Quemcunque autem numerum utrique antecedenti addidero, ut ex defectivis rationibus excessivæ fiant, ex majore defectiva, quæ longius ab excessivarum rationum finibus abest, minor excessiva fiet; & contrà, ex minore defectiva, quæ excessivarum rationum finibus propior est, excessiva major. Si enim utrique antecedeuti, 5 & *6*, addam *9*; à priore ratione aufero; seu, nostri & excessivarum rationum respectu, ipsi addo, rationem $\frac{14}{5}$; posteriori autem addo rationem $\frac{5}{2}$: unde exsurgunt rationes, $\frac{14}{15}$. $\frac{15}{15}$. quarum illa, $\frac{14}{15}$, excessivarum respectu minor est; hæc, $\frac{15}{15}$, major. Rursus, si utrique antecedenti, 14 & 15, addam *6*; priori rationi, $\frac{14}{15}$, addo primùm rationem $\frac{15}{14}$, unde excessivarum rationum fines adtingit; quos & ingreditur, additâ insuper ratione $\frac{20}{15}$, seu $\frac{4}{3}$: posteriori autem rationi, $\frac{15}{15}$, addo rationem $\frac{7}{5}$. Cum igitur utrique antecedenti addiderim *9* & *6*, id est, totum consequentem 15; eundem quidem numerum utriusque rationis antecedenti addidi, sed non utrique rationi eandem rationem. Unitas enim utrique antecedenti duarum defectivarum rationum, eundem consequentem habentium, addita, eò majorem rationem aufert, seu, excessivarum respectu, addit, quo defectiva erat major, & minoribus terminis comprehensa: duarum autem excessivarum rationum, eundem consequentem habentium, utrique antecedenti unitas addita, eò majo-

rem rationem addit, quò excessiva erat minor, & minoribus terminis inclusa. Quare novem unitates, rationis $\frac{5}{15}$ antecedenti additæ, ab ipsa auferunt rationem majorem, $\frac{14}{5}$; posterioris rationis antecedenti additæ, ab ipsa auferunt rationem minorem, $\frac{15}{6}$. seu $\frac{5}{2}$. Superat enim ratio $\frac{14}{5}$ rationem $\frac{5}{2}$, ratione $\frac{28}{25}$. Rursus, unitas utrique antecedenti addita, à priore aufert rationem $\frac{15}{14}$; posteriori autem addit rationem $\frac{16}{15}$. quarum illa major est; hæc, minor. Denique, quinque unitates utrique antecedenti additæ, priori rationi addunt rationem majorem, $\frac{20}{15}$, seu $\frac{4}{3}$; posteriori autem minorem, $\frac{21}{16}$. Totum igitur consequentem (15) prioris rationis ($\frac{5}{15}$) antecedenti (5) addendo, addo huic rationi rationem $\frac{8}{2}$; at posterioris rationis ($\frac{6}{15}$) antecedenti (6) totum consequentem (15) addendo, addo huic rationi rationem $\frac{7}{2}$. Ratio autem differentialis $\frac{8}{7}$; quâ priori addita $\frac{8}{2}$, superat posteriori additam $\frac{7}{2}$; addita differentiali rationi $\frac{21}{20}$; quâ posterior producta ($\frac{21}{15}$) superat productam priorem, ($\frac{20}{15}$) efficit differentialem rationem $\frac{6}{5}$, quâ prior defectiva $\frac{5}{15}$ superabat posteriorem defectivam $\frac{6}{15}$. Planum itaque est, si majoris defectivæ rationis antecedenti numerus addatur, minorem inde excessivam oriri, quàm si idem numerus addatur antecedenti defectivæ minoris. Falsa igitur est ratiocinatio componentis, in defectivo rationum genere usurpata; vera, in excessivo. Quare ex adjunctis quinto libro propositionibus vigesimaoctava, secundum Commandini numerationem; quæ Pappo libro VII est propositio tertia, & hîc quoque ab Eutocio pagina 39 demonstratur; partim vera est, partim falsa.

Vera in rationibus excessivis, cujusmodi diagrammata illi adhibent; falsa in rationibus defectivis, ex Euthymii doctrina: quamvis illud neget Pappus ejusdem libri propositione quarta; & Eutocius hîc paginâ 40. v. 36. Eadem de causa ratiocinatio dividentis vera est in rationibus excessivis; falsa in defectivis. Quare ex adjunctis quinto libro propositionibus etiam vacillat vigesimanona. quam Eutocius hîc demonstravit paginâ 40. v. 20. Atque eadem hae componentis ratiocinatione usus Eutocius, male demonstravit hîc paginâ 41. v. 2. ratiocinationem convertentis; quam ante ipsum bene demonstrârat Pappus propositione sexta, quæ in adjunctis quinto libro est XXX. Porro cum rationes excessivæ & defectivæ inter se comparantur, falsæ quoque sunt in adjunctis quinto libro propositiones XXXI & XXXII, quæ Pappo sunt VIII & IX. At veræ illæ sunt ex Euthymii sententia, qui excessivas rationes cum excessivis, & defectivas cum defectivis solùm comparari posse statuit. Simpliciter autem falsæ ex illis sunt XXVI & XXVII. quæ Pappo sunt VII & V. Octo igitur in universum falsas propositiones in quinto Elementorum libro notavit Euthymius. Ex illis autem multæ aliæ tum propositiones, tum demonstrationes falsæ propullularunt, quas recensere nimis longum foret. Veterum præterea aliquas in Pappo Euthymius notavit; nempe septimi libri XI & XII. Deinde XVI, quæ in excessivis rationibus vera est; falsa in defectivis: unde paralogismorum origo pagina 48. v. 23. quamvis ter ab Eutocio hîc sit demonstrata; primùm pag. 51. v. 18. deinde ejus conversum

pag. 52. v. ultimo. & pag. 65. v. 29. Porro falsæ sunt, propositio CLXXX, quæ est secundi Conicorum Apollonii lemma V. propositio CLXXXI, quæ est ejusdem libri lemma VI. propositio CLXXXVII, quæ est lemma XII; sed in lemmatis secundo Apollonii libro à Commandino præmissis XI. Ex parte autem male demonstratæ sunt propositiones, CCXXXII. CCXXXIII. CCXXXIV. quæ sunt tria lemmata; in quorum singulis hallucinatus est Commandinus. Duodecimi enim lemmatis duorum casuum diagrammata commutavit, dum primi casus diagramma facit, quando G cadit ultra BC. contrà autem noster MS.tus primi casus diagramma recte facit, quando G cadit intra BC, & H intra EF: secundi autem casus diagramma, quando G cadit ultra BC, & H ultra EF. Tertiidecimi diagramma & MS.tus, & Commandinus perperam faciunt præcedentis lemmatis diagramma secundum: unde bis pro *μείζονα λόγον*, quod probè manu exarati libri habent, scribendum putat, *ἐλάσσονα λόγον*. Similiter erravit in lemmate XIV. ubi tamen & noster MS.tus posteriore loco perperam habet, *ἐλάσσονα*. item prioris casus diagramma. Sed & ipsas propositiones cum diagrammatis suis restitutas, ut & Græca ipsarum ex MS.to verba mihi tradidit Euthymius.

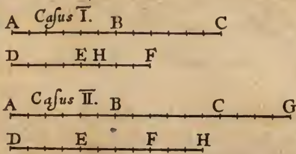
PAPPI ALEXANDRINI MATHEMATICORUM COLLECTANEORUM LIBRI VII PROPOSITIO CCXXXII. LEMMA XII.

Ἔσω ἴση ἡ μὲν AB τῇ BΓ ἡ δὲ ΔE τῇ EZ. ἔτι δὲ ἡ BΓ

SIt AB æqualis ipsi BC; & DE, ipsi EF. porro BC ad

CG majorem rationem habeat quàm EF ad FH. Dico in primo caſu & AG ad BC majorem rationem habere quàm DH ad EF; in ſecundo caſu, minorem.

πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω.



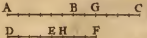
Quoniam enim BC ad CG majorem rationem habet quàm EF ad FH; CB ad BG in primo caſu minorem rationem habet quàm FE ad EH: in ſecundo caſu, majorem. Quare & AB ad BG in primo caſu minorem rationem habet quàm DE ad EH: in ſecundo caſu, majorem. Et GA ergo ad AB in primo caſu majorem habet rationem quàm HD ad DE: in ſecundo caſu, minorem. Eſt autem, ut AB ad BC, ſic DE ad EF. Ex æquo igitur in primo caſu AG ad BC majorem rationem habet quàm DH ad EF: in ſecundo caſu, minorem.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, μείζω. ὥστε καὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, μείζω. καὶ ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω. καὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. δι' ἴσου ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πλώσεως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσω.

PROPOSITIO CCXXXIII. LEMMA XIII.

Ἔστω πάλιν ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ· ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ. ἔτι δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ. ὅτι καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

Sit iterum AB æqualis ipsi BC; & DE ipsi EF. porro AG ad GB minorem rationem habeat quàm DH ad HE. Dico & BC ad CG majorem rationem habere quàm EF ad FH.



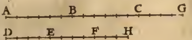
Ἐπεὶ γὰρ, κατ' ἀναστροφὴν καὶ διαίρεσιν, ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστι πρὸς τὴν ΒΓ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστι πρὸς τὴν ΕΖ· ἀναστρέψαντι καὶ διελόντι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

Quoniam enim, per conversionem & divisionem, GB ad BA, hoc est, ad BC, majorem rationem habet quàm HE ad ED, hoc est, ad EF; convertenti & dividenti BC ad CG majorem rationem habet quàm EF ad FH.

PROPOSITIO CCXXXIV. LEMMA XIV.

Ἔστω ἴση μὲν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ· ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ. καὶ ἔτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ. ὅτι ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

Sit AB æqualis ipsi BC; & DE, ipsi EF. porro AG ad GB majorem rationem habeat quàm DH ad HE. Dico BG ad GC majorem rationem habere quàm EH ad HF.



Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΖΕ, πρὸς τὴν ΕΘ· ἀναστρέψαντι κατὰ διαίρεσιν ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

Quoniam enim per divisionem AB, hoc est, CB, ad BG majorem rationem habet quàm DE, hoc est, FE, ad EH; convertenti per divisionem BG ad GC majorem rationem habet quàm EH ad HF.

JAm ad alteram octavæ propositionis de Sphæra & Cylindro demonstrationem veniemus. quamvis eo labore functus videri possim, dum suprà & verba recitavi, à quibus paralogismorum illa series incipit, & causam addidi, cur in Geometriam impingere censeantur. Hoc solùm restare puto, ut numeros, quibus figurarum istarum lineas Euthymius adcommodavit, breviter exponam. In primæ itaque demonstrationis figura, (pag. 42) sphæræ diameter BD est partium 13. quarum 9 habet BF; 4, FD. Radius igitur BE, seu ED, cui æqualis est BK, habet partes $6\frac{1}{2}$; AF, 6. Porro FG, $6\frac{8}{9}$. BH, $14\frac{5}{8}$. BN, $9\frac{3}{4}$. Major sphæræ portio ABC, æqualis cono AHC, est solidarum partium $\frac{18711}{21}$, seu 891: minor ADC, æqualis cono AGC, $\frac{5456}{21}$, seu $259\frac{17}{21}$. Majoris autem portionis superficies, $\frac{2574}{7}$, est ad minoris portionis superficiem $\frac{1144}{7}$, ut 9 ad 4. cujus rationis $\frac{9}{4}$ dupla est ratio $\frac{81}{16}$. Dicit igitur Archimedes, portionem sphæræ majorem ABC, 891, ad minorem portionem ADC, $259\frac{17}{21}$, minorem rationem habere quàm sit dupla rationis superficiei majoris portionis ad superficiem minoris portionis; nempe minorem quàm $\frac{81}{16}$, hoc est, $\frac{891}{176}$. (quippe numerus 176 longius distat à numero 891, quàm ab eodem hoc numero distat numerus $259\frac{17}{21}$.) majorem autem quàm sit sesquialtera rationis superficiei majoris portionis ad superficiem minoris portionis; nempe majorem quàm $\frac{27}{8}$, hoc est, $\frac{891}{264}$. (quippe major distantia est inter numeros 891 & $259\frac{17}{21}$, quàm inter numeros $\frac{891}{264}$.) In hoc autem demonstrando cum invenisset (pag. 43. v. 33.) HF ad FK minorem rationem habere quàm KF ad FG;

nempe $23\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$ minorem rationem habere quàm $15\frac{1}{2}$ ad $6\frac{8}{9}$; inde concludit rectangulum ab extremis HFG contentum, minus esse rectangulo à mediis, hoc est, quadrato ab FK; nempe $162\frac{3}{4}$ esse minorem quàm $240\frac{1}{4}$; seu 651 minorem esse quàm 961. Hoc, ut & supra dictum est, veritati consonat, si rationes excessivæ, major ac minor, uti hîc, præcedant, quarum magnitudinibus deinde rectangula illa comprehendantur: at si inverso modo rectangula illa præcesserint, resolvendo & verum, & falsum, inde deducere possum. Verum, si rectangula illa in rationes excessivas resolvantur; quod & in hac priore demonstratione fit (pag. 44. v. 16.) quando rectangulum à BFD, minus existens quàm rectangulum à BED; nempe 36 minor quàm $42\frac{1}{4}$; resolvitur in rationes excessivas, ita ut FB ad BE minorem rationem habeat quàm ED ad DF; nempe 9 ad $6\frac{1}{2}$ minorem rationem quàm $6\frac{1}{2}$ ad 4. Falsum autem, si in defectivas; quod in posteriore hujus octavæ propositionis demonstratione factum pag. 48. v. 27. Cum enim quadratum à CH in HF, minus sit rectangulo à BHC in HG, nempe 496 minor quàm 504: resolvendo hæc in rationes defectivas male concludit, quadratum à CH ad rectangulum à BHC, 16 ad 24, minorem rationem habere quàm rectam GH ad HF, $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$; hoc est, rectam GH ad HF, $10\frac{1}{2}$ ad $15\frac{1}{2}$, majorem rationem habere quàm CH ad HB, 4 ad 6. Atque ita ex falso secundo membro octavæ propositionis V^ti^ Elementorum ratiocinando pergens, GH ad ambas AH, KE, $10\frac{1}{2}$ ad $9+6\frac{1}{2}$ majorem rationem habere dicit quàm CH ad HB, 4 ad 6. adeoque CH ab-

latâ ab HG, 4 à $10\frac{1}{2}$; & LE, quæ æqualis eſt ipſi BH, ab EK, 6 à $6\frac{1}{2}$; monſtrandum dicit, reliquam CG ad reliquas ambas AH, KL, $6\frac{1}{2}$ ad $9 + \frac{1}{2}$, majorem rationem habere quàm CH ad HB, 4 ad 6; hoc eſt, HB ad HA; hoc eſt, LE ad HA, 6 ad 9. Permutando autem, quod hîc fit à defectivo ad exceſsivum genus tranſeundo, verum eſt, KE ad EL, $6\frac{1}{2}$ ad 6, majorem rationem habere quàm ambas KL, HA ad HA, $\frac{1}{2} + 9$ ad 9. at dividendo, quod fit, rurſus ex genere exceſsivo tranſeundo in genus defectivum, contra vera Euthymii elementa concludit, KL ad LE, $\frac{1}{2}$ ad 6, majorem rationem habere quàm KL ad HA, $\frac{1}{2}$ ad 9. quia minor eſt LE quàm HA; adeoque ex falſo ſecundo octavæ V.ti Elementorum membro, eadem KL ad minorem LE, majorem rationem habet quàm ad majorem HA. Hanc autem paralogiſmorum ſeriem explicatiorem reddidit Eutocius, (pag. 67. v. 5.) &, ex defectivo rationum genere in exceſsivum tranſeundo, veris concluſionibus intermiſtam. Quoniam enim monſtrandum eſt, rectam GH ad ambas HA, KE, majorem rationem habere quàm CH ad HB; $10\frac{1}{2}.\ 9 + 6\frac{1}{2}. + 4.\ 6.$ quod eſt falſum; permutando, quod hîc fit in cóntrarium genus tranſeundo, verè concluditur, $10\frac{1}{2}$ ad $4 + 9 + 6\frac{1}{2}.\ 6.$ Porro dividendo, $6\frac{1}{2}$ ad 4, recte majorem rationem habere dicitur quàm $9 + \frac{1}{2}.\ 6.$ Sed permutando, quod hîc fit ab exceſsivo tranſeundo ad genus defectivum, falſum eſt, $6\frac{1}{2}$ ad $9\frac{1}{2}$ majorem rationem habere quàm 4 ad 6. At vero, ut 4 ad 6, ita 6 ad 9. Monſtrandum ergo, $6\frac{1}{2}$ ad $9\frac{1}{2} + 6.\ 9.$ quod falſum. uude permutando verum, $6\frac{1}{2}.\ 6 + 9\frac{1}{2}.\ 9.$ Rurſus autem divi-

dendo, quod hîc fit ex genere excessivo in contrarium genus transeundo, falsum colligitur, ¦ ad 6 majorem rationem habere quàm ¦ ad 9. Cæterum horum paralogismorum originem & causam, sequentibus numeris fundanis evidentius exponam. Quoniam enim 4 ad 3 minorem rationem habet quàm 3 ad 2; igitur rectangulum ab extremis 4 & 2, nempe 8, minus est rectangulo à mediis, 3 & 3, seu quadrato 9. Seu, quod idem; quoniam 3 ad 2 majorem rationem habet quàm 4 ad 3; igitur rectangulum ab extremis, majus est rectangulo à mediis, nempe 9 major quàm 8: quod etiam Serenus libro II.do propositione prima demonstravit; & rursus Eutocius ad XXXIV libri I Conicorum Apollonii. At contrà, si rectangulum 8 propositum sit minus rectangulo 9; rectè hinc colligo, 4 ad 3 minorem rationem habere quàm 3 ad 2; resolvendo nempe rectangula in laterum rationes excessivas; sed perperam, eadem rectangula in laterum rationes defectivas resolvendo, definio, 2 ad 3 minorem rationem habere quàm 3 ad 4. quomodo rectangula illa in rationes resolvendo colligere possum ex octava V.ti Euclidis. In priore igitur octavæ propositionis de Sphæra & Cylindro demonstratione, utroque modo, & rectangula ex lateribus componendo, & rectangula in latera resolvendo, à veritate non est aberratum: in posteriore autem demonstratione, rectangula in laterum rationes defectivas resolvendo, paralogismum Archimedes commisit, quem ex veris Euthymii elementis corrigendum hactenus demonstravi.

Nunc ad ea veniam refutanda, quæ contra omnem antiquitatem primus in Geometriam induxit hic Theo Alexandrinus. ARCHIM. Ingratum plane ſermonem ordieris, quo auſcultando aures meas non ſum defatigaturus. Quin potius ad ea tranſis explicanda, quæ concinnè ex his omnibus deduci poſſunt? quod tertio loco ex ore Euthymii te facturum ſpoponderas. HERMOT. Verbis ſtandum. atque eò magis, quod hic Theo, & tota Mathematicorum poſteritas, quæ eundem hunc errorem erravit, magnis & evidentibus argumentis adducti, hoc ſe ſtatuiſſe putant. THEO. Ita certe putavi. & errorem meum, ut audio, poſteri largiter ampliarunt. Sed ex Euthymii doctrina, quam hactenus propoſuit Hermotimus, agnovi errorem, & ingenua voce nunc repudio. illis quoque, qui mea auctoritate in eum inducti ſunt, auctor rurſus ſum, ut tanquam falſum, & gignendis erroribus obnoxium, illud dogma rejiciant. ARCHIM. Facis quod ingenuum hominem, & mathematicum decet, qui nullla pertinacia, & altercandi lubidine, paralogiſmos ſuos defendere conatur; ſed veritatem non minus diſcere quàm docere eſt paratus. HERMOT. Me verò felicem, qui tantum memoriâ valui, ut recenſendis Euthymii mei dogmatis ſummos undiquaque viros in eandem ſententiam pertraxerim! Unum tamen mæ ſollicitum habet, quod Mathematici, qui nunc ſuperant, argumentis ſuis non ſatisfactum clamitabunt, niſi etiam veſtro calculo erronea ſint deprehenſa. Rogo itaqua vos, ut pauca etiam de iſtis me narrantem audiatis; eoque magis, quod novum quoque proportionum genus

ab uno, non infimi subsellii Geometra, nuper sit inventum, cujus adminiculo circuli quadraturam, toties irrito conatu à vobis tentatam, spissis voluminibus se demonstrasse opinatur. Præterea ad Euclidis Elementorum gloriam à tetris erroribus vindicandam quædam hîc adspergentur. quæ, ut incorrupta, nulloque pravæ interpretationis vitio contaminata serventur, non tantùm posteritatis, sed etiam vestrûm omnium, quorum scripta iis nituntur, interesse arbitror. ARCHIM. Euclidis hæc cura sit. falsis audiendis nullum ego tempus collocem. APOL. Nec ego sane. nimis enim tetrica illa erunt, & defatigando cerebro tantùm nata. EUCL. Certè & meâ causâ, & Mathematicorum, qui omnes iis erroribus irretiti nunc inter mortales degunt, hæc quoque vestris calculis vel probare, vel rejicere deberetis. ARCHIM. Tuam ergo in gratiam, ô Euclide, ingrato adeo sermone hîc detinebimur. HERMOT. Pauco vos sum detenturus, monstrato deinde falsarum propositionum catalogo, in quo, quot libuerit, legetis. Fontem igitur erroris, & scaturiginem Euthymius vocat vocabulum πηλικότης, *quantitas*, cujus verum significatum atque usum, ex Mathematica antiquitate productum, suprà retuli. Diserte enim negat Euthymius, vocabulum πηλικότης, *quantitas*, significare magnitudinem, aut numerum, qui rationis quantitatem veram solus exhibeat. quod Eutocius dixit, & ante ipsum Theo. In illo autem vocabulo rectè explicando quanto ingeniosior est, Theone & Eutocio haud dubie junior Scholiastes, cujus verba pag. 12 produxi; tanto ineptior est ille Scholiastes, quem

citavi pag. 21. Quippe absque ullo evidentioris doctrinæ compendio rationum componendarum quantitates per minuta sexagesima indagando, hanc doctrinam non tàm explicasse quàm intricasse est judicandus. Rationis enim $\frac{8}{2}$, compositæ ex rationibus $\frac{8}{4}$ & $\frac{4}{2}$, quantitatem cæteri dicunt esse quaternarium, ex quantitatum, seu denominatorum 2 & 2 inter se multiplicatione productum: hic autem Scholiastes, maximum componendarum rationum terminum extremum æqualem ponens 60 minutis primis, seu uni parti, quam nunc Arabum consuetudine gradum vocant; hujus dimidium sumit, minuta 30; quoniam octonarii dimidius est quaternarius: Rursus numeri 60 dimidium sumit 30; quoniam quaternarii dimidius est binarius: Deinde 30 minuta prima per 30 minuta item prima multiplicat, unde fiunt 900 minuta secunda. quibus ad minuta prima reductis fiunt 15 minuta prima, ad quæ 60 sunt in ratione quadrupla, uti 8 ad 2. Male autem 15 ad 60 refert, cum contrà 60 cum 15 comparare deberet; quoniam rationes excessivas, $\frac{8}{4}$ & $\frac{4}{2}$, proposuit; non autem defectivas, $\frac{2}{4}$ & $\frac{4}{8}$. Primi igitur exempli ponere debuisset hos numeros, $\frac{60}{30}$. $\frac{60}{30}$. qui inter se multiplicati faciunt $\frac{3600}{900}$ minuta secunda, in ratione quadrupla; seu in eadem ratione $\frac{60}{15}$ minuta prima. Eadem methodo secundi exempli hos numeros posuisset; $\frac{5}{60}$. $\frac{300}{60}$ | $\frac{900}{3600}$ seu $\frac{15}{60}$. non autem, ut secundorum minutorum ad prima reductionem evitaret, istos, $\frac{3}{60}$. $\frac{5}{1}$. qua methodo & quinti exempli numeros adsumsit $\frac{12}{60}$. $\frac{4}{1}$ | $\frac{48}{60}$. cum hos adhibere potuisset, $\frac{12}{60}$. $\frac{240}{60}$ | $\frac{2880}{3600}$ | $\frac{48}{60}$. Quamvis eodem res recidat, & cætera quoque exempla

ita expediri poſsint, ut primæ rationis ſexageſima ſumantur, alterius autem multipli numeri, aut pars, aut partes, à quibus ratio denominatur. Tertii exempli numeros recte expoſuit, $\frac{30}{60}\cdot\frac{40}{60}\Big|\frac{1200}{3600}\Big|\frac{20}{60}$. ut & quarti, $\frac{30}{60}\cdot\frac{20}{60}\Big|\frac{600}{3600}\Big|\frac{10}{60}$. In ſexto autem & ultimo exemplo, ſecundum eandem methodum expediendo, plane defecit. Cum enim propoſitæ rationis ſubduplæ, ex ratione ſubſequialtera & ſubſupertertia compoſitæ, ſciret ex octava quinti, rationem ſubſupertertiam majorem eſſe ratione ſubſeſquialtera, uti $\frac{3}{4}$, quantitas ſeu denominator ſubſupertertiæ rationis, major eſt denominatore $\frac{2}{3}$ rationis ſubſeſquialteræ, debuit omnino rationis ſubſupertertiæ quantitatem majorem adſumere quàm rationis ſubſeſquialteræ; at male adſumſit illius rationis minuta 60; hujus, 30. quamvis multiplicatis inter ſe his numeris propoſitum conficiat; ſed divinando potius quàm ratiocinando. Cum enim 60 ad 45 eandem rationem habeant quam 40 ad 30, extremos duos caſu quodam inter ſe multiplicavit, cum medios ſecundum methodum ſuam inter ſe multiplicare debuiſſet, hoc modo: $\frac{40}{60}\cdot\frac{45}{60}\Big|\frac{1800}{3600}\Big|\frac{30}{60}$. Pro verbis ipſius pag. 24. v. 15. unâ liturâ inductis, ſi omnis iſta de denominatoribus doctrina alicujus momenti eſſet, hæc reponerem: *καὶ ἐπεὶ ὁ δύο ὑφημιόλιός ἐςι τοῦ γ΄· ὁ δὲ γ΄ ὑπεπίτριτος τοῦ δ΄· λαμβάνω τὰ μ΄ λεπτὰ, τὸ τῆς μονάδος δίμοιρον. καὶ πάλιν τὰ με΄ λεπτὰ, τὰ τῆς μονάδος τρία τέταρτα. καὶ ποιῶ τὰ μ΄ ἐπὶ τὰ με΄. καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια δεύτερα λεπτά.* *Et quoniam binarius ſubſeſquialter eſt ternarii; ternarius autem ſubſupertertius quaternarii; ſumo XL minuta, unitatis beſſem; & rurſus XLV minuta, unitatis tres quartas.*

Deinde duco XL in XLV; unde fiunt mille octingenta minuta secunda. Ex quibus quidem id perſpicitur, vere minutum eſſe iſtud minutorum inventum, quod in explicanda doctrina item minuta operoſe Scholiaſtes ille adhibuit. Cæterum illud verum eſt ex diviſione, quæ multiplicationi eſt adverſa, diviſo antecedente cujuſque rationis per ſuum conſequentem, numerum exurgere, quem illi *πηλικότητα λόγου, quantitatem rationis,* exhibere putant, qui per conſequentem multiplicatus, rurſus producat antecedentem; ſed nullum inventa hæc rationis antecedens magnitudo uſum præſtat, niſi unitatem, quæ illa methodo omnium rationum communis conſequens eſt, illi ſubjiciamus. Quare rationis duplæ quantitatem non exhibet numerus 2, ſed ratio $\frac{2}{1}$. nec ſextuplæ rationis quantitatem exhibet numerus ſenarius, ſed ratio $\frac{6}{1}$. Similiter rationis ſeſcuplæ quantitas non eſt numerus $1\frac{1}{2}$, quod Theo vult & Eutocius, omniumque juniorum mathematicorum filii, ſed numerus $1\frac{1}{2}$ ad 1 relatus; hoc eſt, in integris numeris ratio $\frac{3}{2}$, quæ propterea πυθμὴν fundus ſeſquialteræ rationis dicitur. Ita rationis duplæſuperquartæ, $\frac{9}{4}$, quantitatem non exhibet numerus $2\frac{1}{4}$ ſolus, ſed unà cum unitate; id eſt, in numeris integris duplæſuperquartæ rationis magnitudinem exhibet ratio fundana $\frac{9}{4}$, quâ, tanqvam communi menſura, rationis duplæſuperquartæ rationem duplam, triplam, quadruplam, ſeſquialteram, ſupertertiam, & cæteras ejus multiplas, aut ſuperparticulares, aut ſuperpertes, menſuramus. Quale enim menſuratum eſt, talis etiam menſura eſſe debet. Primus autem Nicomachus Geraſenus,

quantum quidem ex Mathematica antiquitate scitur, pravam hanc vocabuli πηλικότης interpretationem invenit; quem secuti sunt Heronas, commentario in illius Arithmeticam Introductionem; Eutocius commentario in quartam propositionem secundi libri Archimedis de Sphæra & Cylindro; sed pessimum ejus usum primus Theo monstravit, falsum inde dogma fabricando, nempe rationem duplicari, & quovis numero multiplicari posse, duplicatâ, aut quovis numero multiplicatâ hac rationis quantitate seu denominatore, qui est ejusdem rationis antecedens terminus ad unitatem relatus. Cum enim pag. 25. monstrare vellet, rationem sextuplam componi, seu addi, ex dupla & tripla; contrà sextuplam ex duplicata tripla prodiisse dicit; additâ generali causâ, quod, si triplum alicujus duplicaverimus, exurgat ipsius sextuplum. Verum quidem est, ternarium, rationis triplæ antecedentem, duplicatum fieri senarium; sed falsam, illud quod triplum alicujus est, duplicatum fieri sextuplum: hoc est, triplam rationem duplicatam fieri sextuplam. De duplicata autem tripla ratione, & non de antecedente termino, nempe de ternario duplicato, ista esse accipienda, docent verba relationem significantia, duplum, triplum, sextuplum; uti & tota demonstratio, quæ de rationibus instituitur. Sic deinde ex triplicata dimidia ratione, id est, subduplâ, fieri dicit sesquialteram. Quia enim subduplæ rationis denominator, seu quantitas, ipsi est minutia $\frac{1}{2}$, hac triplicatâ exurgit rationis sesquialteræ quantitas, $1\frac{1}{2}$. ideoque subdupla ratio ter sumta facit

rationem ſeſquialteram. Subduplam autem rationem, dimidiam quoqve vocavit Theo Smyrnæus pag. 127. *ἀπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἓν, καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, διάστημα ἓν καὶ τὸ αὐτό, λόγος δὲ ἕτερος τῶν μὲν δύο πρὸς τὸ ἓν, διπλάσιος τοῦ δὲ ἑνὸς πρὸς τὰ δύο, ἥμισυς. A binario ad unitatem, & ab unitate ad binarium, unum idemque eſt intervallum, ratio autem diverſa: binarii ad unitatem, dupla; unitatis ad binarium, dimidia.* Hanc de rationum quantitatibus, ſeu denominatoribus, multiplicandis Theonis doctrinam ſecuti ſunt Cardanus; Rodulphus Volumnius Spoletanus, diſputatione de proportione proportionum, quem toties laudat ut eximium hujus ſententiæ doctorem Clavius, commentariis in Euclidis Elementa. Clavium deinde, fortiſsimum hujus dogmatis propugnatorem, ſecuta eſt tota mathematicorum cohors ad noſtra uſque tempora. Hic autem ad decimam quinti libri definitionem ita commentatur. *Et ſi proportio 25 ad 1 dicitur duplicata proportionis quintuplæ, tamen decupla proportio eſt ejuſdem dupla: Quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadrupla duplicata ſit ſedecupla, ut hic patet, 16. 4. 1.* Poſtea trigecuplam dicit decuplæ eſſe triplam. Rurſus: *Proportio 3 ad 192 à $6\frac{1}{4}$ denominata, dici non poteſt triplo major proportione ſubquadrupla, 3 ad 12: quia denominator $\frac{1}{4}$, triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{64}$, ſed $\frac{3}{4}$. atque ita proportio ſubſeſquitertia dicetur tripla proportionis ſubquadruplæ; ſicut etiam, non proportio à 64 denominata, ſed proportio duodecupla, eſt proportionis quadruplæ tripla; propterea quod denominator 4 triplicatus non producit denominatorem 64, ſed 12.*

Paulo post: *Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator hujus denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita ut proprotio decupla sit dupla quintuplæ, & sextupla sit tripla duplæ, &c. ostendemus ad finem libri IX. tractatumque est hoc argumentum copiosè à Rodulpho Volumnio, in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum judicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur agens aliquod ad patiens proportionem habeat, verbi gratià, decuplam, ita ut agens sit decem, & patiens unum; quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem agens augeatur, ut fiat viginti, patiens autem maneat unum, agens tunc duplo majorem habere potentiam respectu ejusdem patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cujus denominator XX, duplus est denominatoris X, dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, ut auctores contrariæ sententiæ volunt; sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ, propter multiplicationem denominatoris X in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interjiciuntur, ut hìc apparet, 100. 10. 1. Sic etiam si è contrario, agens aliquod ad patiens habeat proportionem, verbi gratia, subdecuplam, ita ut agens sit I, & patiens X, quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, agens, quod sit II, duplo esse potentius respectu ejusdem patientis X, quàm agens I? Cum ergo agens II ad patiens X, habeat proportionem subquintuplam, cujus denominator $\frac{1}{5}$, vel $\frac{2}{10}$, conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$ bis sumto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non autem illa, quæ subcentupla est, ut prædicti auctores*

volunt, cum hæc longe minor sit quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, ut hic patet, 1. 10. 100. In eandem sententiam scribit ad libri IX finem de proportionum compositione: *Huc accedit*, inquit, *quod secundum communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sextuplam, non autem noncuplam, ut prædicti auctores volunt; quanquam noncupla proportio dicatur tripla duplicata, ut in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, ut III, illud idem duplo potentius factum esse ut VI, non autem ut IX? Sic etiam communis intelligentia comprehendit, ex proportione tripla & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quod duo moventia, ut 3 & 5, moveant simul sumta, ut 8. non autem ex illis constitui proportionem 15 ad 1. quamvis hæc ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex definitione V libri VI. ut patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patientis exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia, agens ut 6, non posset habere agens duplo minus, quod inter 6 & 1 nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non statim intelligat, agens ut 3, in dupla proportione minus esse quàm agens ut 6?* Ex his autem perspicuum est, non tantùm ignorasse illos auctores, quid sit rationum compositio; sed &, quid sit ratio. Cum enim ratio à duabus magnitudinibus comprehendatur, uti linea à duobus terminis; planum est, duas rationes, quæ ex quatuor magnitudinibus, saltem potentià, constant, tum additas dici, cum utræque, unà

media quantitate conjunctæ, extremis duabus magnitudinibus continentur: quemadmodum duæ lineæ, quæ quatuor terminos habent, compositæ dicuntur, cum unius inferior terminus factus est alterius terminus superior; atque ita duæ lineæ in unam, duabus datis æqualem, coaluére. Uti autem eandem lineam & alii cuicunque lineæ, & sibi ipsi, possum adjungere; sic quoque rationem, & alii cuicunque rationi, & sibi ipsi, quoties velim, adponere possum. Porro uti, existentibus tribus lineis inter se æqualibus, composita ex duabus linea reliquæ dupla est; sic expositis tribus rationibus æque magnis, composita ex duabus ratio reliquæ dupla existit. Duplum enim communi sententia omnes homines judicant, quod bis habet simplum; triplum, quod tria simpla æquat; centuplum, quod centum. Generalem autem quascunque rationes componendi methodum ex quinta definitione libri sexti addiscimus: at rationem sibi adpositam, adeoqve duplicatam, cognoscimus, cum datis duabus illius rationis magnitudinibus tertia proportionalis est inventa; triplicatam, cum tribus datis proportionalibus quarta proportionalis est adjuncta; & sic deinceps. *Cum enim*, inquit quinti libri definitione decimâ, *tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam dicitur habere rationem duplam ejus quam habet ad secundam. At cum quatuor magnitudines proportionales sunt, prima ad quartam dicitur habere rationem triplam ejus quam habet ad secundam*. Unde hoc consequitur, primam ad quartam dici habere sesquialteram rationem ejus quam habet ad tertiam. &, cum quinque magnitudines pro-

portionales ſunt, primam ad quintam, ſupertertiam rationem habere ejus quam habet ad quartam. Porro ſi ſex magnitudines proportionales fuerint, prima ad ſextam ſuperquartam habet rationem ejus quam habet ad quintam: prima autem ad ſextam habet rationem ſuperbitertiam ejus quam habet ad quartam; ſeu, eſt ut 5 & 3: rurſus prima ad ſextam habet rationem dupliſuperdimidiam ejus quam habet ad tertiam. Scholiaſtes hujus definitionis, quem pag. 30 produxi, obſcure loquitur initio. His enim verbis: *Non dicit, duas rationes unius eſſe duplas; quod etiam verum:* non poteſt ſignificare; certe non debet; duas rationes Arithmeticè additas, unius eſſe duplas; ut ſi rationes $\frac{3}{2}$ & $\frac{3}{2}$ additæ, dicantur facere rationem $\frac{6}{2}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ ſit dupla: ſed hoc voluiſſe debet, duas rationes inæquales, ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{3}{1}$, aut $\frac{12}{5}$. $\frac{5}{3}$, aut hujuſmodi duas alias, conjunctim duplas eſſe poſſe unius rationis, nempe ipſius $\frac{2}{1}$, quæ ipſarum eſt dimidia. Cæterum perinde eſt, ſive prima proportionis magnitudo major ſit, ſive minor: quamvis, ſi de rationum quantitate, quâ alia ſuperat aliam, quæratur, octavæ quinti falſitatem ex Euthymii doctrina evitare debeamus. Quare ex veterum ſententia, ut ratio quadrupla eſt duplæ rationis dupla; hoc eſt, ratio $\frac{4}{1}$ ad rationem $\frac{2}{1}$ eſt ut 2 ad 1: ſic ratio ſubquadrupla ſubduplæ eſt ſubdupla; id eſt, ratio $\frac{1}{4}$ ad rationem $\frac{1}{2}$ eſt ut 1 ad 2. Similiter ſubcentupla ratio ſubdecuplæ rationis eſt ſubdupla; ſeu, ut 1 ad 2, ſic $\frac{1}{100}$ ad $\frac{1}{10}$. Qua in re admodum ſe torſerunt Euclidis commentatores. Commandinus enim ad definitionem decimam; quam in binas ſecans decimam & unde-

cimam vocat; ita scribit. *Decima & undecima diffinitio terminos requirunt necessario inæquales, & primum ipsorum majorem. Nam si æquales sint, eadem est primi ad secundum, & ad tertium proportio. Si verò primus sit minor, non potest primus ad tertium duplam proportionem habere proprie ejus, quam habet ad secundum, cum primi ad secundum major sit proportio quàm ad tertium, ex octava hujus.* Hæc Commandini verba Clavius inconcinna, & Euclidis sententiæ adversa judicavit. Primùm enim hoc in iis reprehendit, quod docere videantur, si tres numeri sint proportionales, ut 9. 6. 4, primum ad tertium, 9 ad 4, revera duplam habere rationem ejus quam habet ad secundum, nempe 9 ad 6. quia scilicet in Euclidis verbis, *διπλασίονα λόγον*, vertit, *duplam rationem*; ipsa vocabuli perspicua significatione adactus; non autem, quod Clavius volebat, *duplicatam*. Probè autem vertit Commandinus; sed & optime Euclidis, veterumqve omnium sententiam explicavit, si, quam Clavius reprehendit, vere est amplexus: quoniam verò plura hac de re non scripsit, potuit idem sensisse, qvamvis non iisdem verbis, quod Clavius; nempe rationem duplam dici rationis, non autem revera esse; sicuti parallelogrammum rectangulum, à duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt, contineri dicitur, quamvis revera non à solis duabus illis, sed insuper ab aliis duabus, æque magnis, adeoque à quatuor rectis, contineatur. Tantæ porro auctoritatis fuit hæc Clavii opinio, qui *λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα*, non, ut verba proprie & vere sonant, *duplam, triplam rationem*, sed *duplicatam, triplicatam*;

cum Francisco Flussate Candalla, qui Campani versionem ex Arabico idiomate factam, hîc secutus est; vertenda censuit, ut, qui Londini, anno cIↃ IↃ CXX, Euclidis Elementa Græce & Latine, elegantibus typis & figuris, & utcunque emendate, adeoque cum laude, edenda curavit, ubique pro *dupla, tripla*, reponendum curarit, *duplicata, triplicata.* quam deinde loquendi formulam omnes Mathematici usurparunt. O stupendam Græcæ linguæ ignorantiam, atque erroris fœditatem, qua non vulgus Mathematicorum, sed duces atque principes inclaruerunt! Deinde Commandinus à Clavio ob ista verba reprehenditur, quod, dum in excessivis rationibus duplam, triplam admittit, in defectivis contrà statuendum censet; eò quod ex octava quinti prima ad secundam, majorem rationem habet quàm ad tertiam. Clavius enim illam definitionem æque in defectivis rationibus veram censet atque in excessivis. Sed magno mentis errore uterque fascinatus in re haud difficili explicanda cœcutiit. Quippe, uti antè dictum est, ratio $\frac{8}{27}$ rationis $\frac{8}{12}$ non est tripla, sed subtripla; seu, ratio $\frac{8}{27}$ ad rationem $\frac{8}{12}$ est ex Euclidis sententia, quam octava quinti tradidit, ut 1 ad 3, non autem, quod Commandinus & Clavius putarunt, ut 3 ad 1. Quare, secundum Euclidis doctrinam, prima ad secundam, 8 ad 12, majorem rationem habet quàm ad quartam, 8 ad 27; & ratio 8 ad 27 subtripla est rationis 8 ad 12: at sequendo Euthymii doctrinam, ratio $\frac{8}{27}$ tripla dicitur rationis $\frac{8}{12}$, sed hoc addito, quod ratio $\frac{8}{27}$ sit defectiva. Clavius igitur omnibus locis; ad quinti definitionem decimam; ad sexti quintam;

noni libri adpendice, & ſcholio in duodecimi propoſitionem duodecimam; ubi exempli cauſa, rationem 1 ad 9, duplicatam vocat rationis 1 ad 3, corrigendus eſt, ut pro verbis, *duplicata, triplicata*, ſcribatur, *ſubdupla, ſubtripla.* Cæterum illud hinc planum eſt, rationum inter ſe eſſe rationem, quam propterea λόγων λόγον Græci adpellarunt; & quidem ſpeciebus; multiplis nempe, ſuperparticularibus, & cæteris; æque variam, atque ſit magnitudinum, & abſolutorum numerorum. Hanc autem ita finimus: λόγος λόγων ἐστὶ δύο λόγων ταὐτοῦ στίχου, ἀπὸ πυθμενικοῦ λόγου κατὰ φυσικοὺς ἀριθμοὺς προχωροῦντος, ἡ κατὰ λόγον πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις. *Ratio rationum eſt duarum rationum ejuſdem ſeriei, à fundana ratione ſecundum naturales numeros progredientis, ſecundum rationem certa quædam inter ipſas relatio. Duarum rationum* dico, quod, uti ratio eſt duarum magnitudinum, ſecundum magnitudinem, inter ſe relatio; ſic rationum ratio ſit duarum rationum inter ſe relatio ſecundum rationem. Deinde addo, *ejuſdem ſeriei à fundana ratione progredientis.* quæ verba oppido ſunt notanda. Cum enim ratio aliqua alterius dupla, tripla, ſeſquialtera, dicitur; ratio fundana & ſimpla, ſecundum naturalem numerorum ſeriem excreviſſe; hoc eſt, continua ſui adpoſitione major facta, intelligitur. Uti enim, ſi unitati cuicunque unitatem addam, fit binarius; rurſus ſi binario eandem unitatem adponam, fit ternarius, & ſic deinceps: ita ſi quamcunque rationem ſibi ipſi adponam, inde fit ratio, prioris, nempe ſimplæ & fundanæ, dupla; ſi hanc duplam cum fundana componam, ratio fit fundanæ tripla; ſi triplæ primam

& fundanam addam, inde fit fundanæ quadrupla. Tripla autem ad duplam est ut 3 ad 2; hoc est, in ratione sesquialtera; quadrupla ad triplam, in ratione supertertia. Porro uti quemcunque numerum, parvum, magnum, unitatis loco ponere possumus; sic & quamcunque rationem, fundanæ & simplæ rationis, hoc est, unitatis loco collocamus. Unde innumeræ rationum progresiones exsurgunt. quarum septem ad senarii quantitatem duntaxat adscendentes, exemplorum loco in

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
I.	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
II.	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{27}{1}$	$\frac{81}{1}$	$\frac{243}{1}$	$\frac{729}{1}$
III.	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{64}{1}$	$\frac{256}{1}$	$\frac{1024}{1}$	$\frac{4096}{1}$
IV.	$\frac{1}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{100}{1}$	$\frac{1000}{1}$	$\frac{10000}{1}$	$\frac{100000}{1}$	$\frac{1000000}{1}$
V.	$\frac{64}{64}$	$\frac{96}{64}$	$\frac{144}{64}$	$\frac{216}{64}$	$\frac{324}{64}$	$\frac{486}{64}$	$\frac{729}{64}$
VI.	$\frac{729}{729}$	$\frac{972}{729}$	$\frac{1296}{729}$	$\frac{1728}{729}$	$\frac{2304}{729}$	$\frac{3072}{729}$	$\frac{4096}{729}$
VII.	$\frac{262144}{262144}$	$\frac{294912}{262144}$	$\frac{331776}{262144}$	$\frac{373248}{262144}$	$\frac{419904}{262144}$	$\frac{472392}{262144}$	$\frac{531441}{262144}$

adjuncto diagrammate exposui. Prima progresio est rationis duplæ. altera, triplæ. tertia, quadruplæ. quarta, decuplæ. quinta, sesquialteræ; quæ in minimis numeris ita adscendit; $\frac{2}{2}.\frac{3}{2}.\frac{9}{4}.\frac{27}{8}.\frac{81}{16}.\frac{243}{32}.\frac{729}{64}.$ sexta, supertertiæ; cujus fundanæ rationes ita excrescunt; $\frac{3}{3}.\frac{4}{3}.\frac{16}{9}.\frac{64}{27}.\frac{256}{81}.\frac{1024}{243}.\frac{4096}{729}.$ septima, superoctavæ; quæ à minimis numeris ad majores sic progreditur; $\frac{8}{8}.\frac{9}{8}.\frac{81}{64}.\frac{729}{512}.\frac{6561}{4096}.\frac{59049}{32768}.\frac{531441}{262144}.$ Illud autem nove hic observandum dicebat Euthymius, cujusque ex his rationum progresionibus rationem cum suæ

ſeriei & progreſsionis ratione ſolùm comparari poſſe, ita ut ſciatur, quam rationem hæc ratio ad illam rationem, & viciſsim, obtineat. Ratio enim $\frac{64}{1}$, ſextupla eſt rationis $\frac{2}{1}$; ſuperquinta, rationis $\frac{32}{1}$, ſeu, ut 6 ad 5; ſeſquialtera rationis $\frac{16}{1}$; dupla rationis $\frac{8}{1}$; tripla rationis $\frac{4}{1}$. quæ omnes ejuſdem ſeriei rationes exiſtunt. Similiter ratio $\frac{81}{1}$ ſupertertia eſt rationis $\frac{27}{1}$; dupla rationis $\frac{9}{1}$; quadrupla rationis $\frac{3}{1}$; ſubſuperquarta rationis $\frac{243}{1}$, ſeu, ut 4 ad 5; ſubſeſquialtera rationis $\frac{729}{1}$: quæ item rationes omnes ejuſdem ſeriei & progreſsionis, triplæ nempe, reperiuntur. Eodem modo ratio $\frac{531441}{262144}$ ſextupla eſt rationis $\frac{294912}{262144}$; hoc eſt, in Harmonicis, ut ſex toni ſuperoctavi ad unum. atque ita ulterius ratiocinando. Nullo autem modo diverſæ progreſsionis rationes inter ſe comparari poſſunt, ut quàm inter ſe rationem habeant, definiatur; quamvis illarum differentialis ratio ſit notiſsima. cujus cauſa rei naturam ſcrutanti obſcura eſſe nequit. Quare ratio $\frac{2}{1}$, quæ primæ ſeriei prima eſt, ineffabilem rationem habet non tantùm ad rationem $\frac{3}{1}$, quæ prima eſt ſeriei ſecundæ, ſed & ad omnes alias ſeriei ſecundæ, tertiæ, quartæ, & cæterarum in infinitum, rationes: differentialis autem ratio, quâ major $\frac{3}{1}$ ſuperat minorem $\frac{2}{1}$, eſt ratio $\frac{3}{2}$. Similiter ratio $\frac{2}{1}$, ſeu $\frac{8}{4}$, ineffabilem rationem habet ad rationem $\frac{144}{64}$, ſeu $\frac{9}{4}$: ſuperat autem ratio $\frac{9}{4}$ rationem $\frac{8}{4}$, ratione $\frac{9}{8}$. Hoc autem inde quoque evidens eſt, quod duas diverſarum progreſsionum rationes per quamcunque aliam minorem rationem menſuraturi, nullam plane invenire queamus, quæ utramque exacte metiatur. Si enim proponantur rationes $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$, quas ratione $\frac{81}{80}$ men-

ſurare velimus, inquiſitione facta, ut pag. 77 monſtratum eſt, hoc fieri non poſſe deprehendemus. Quippe ratio $\frac{2}{1}$ plus quinquagintaquinque rationes $\frac{81}{80}$, ſeu commata, continet; minus quinquagintaſex: ita ut rationis $\frac{2}{1}$ quantitas, ſecundum hanc menſuram inquiſita, exacte haberi nequeat, ſed inter 55 & 56 commata vagetur. Eâdem menſurâ adhibitâ rationem $\frac{3}{1}$ majorem inveniemus 88 commatis; minorem, 89. Harum autem rationum differentialis ratio $\frac{3}{2}$, major reperitur 32 commatis; minor, 33. qui quoque commatum numerus, ablatis 55 aut 56 ab 88, habetur. Similiter has diverſæ ſeriei rationes, $\frac{12}{4}$. $\frac{9}{4}$, ineffabilem inter ſe rationem habere inveniemus; quamvis proxime ad eam accedat, quæ eſt inter antecedentes, 12 & 9, id eſt, ad ſupertertiam. Ratio enim $\frac{12}{4}$, ſeu $\frac{3}{1}$, major eſt 88 commatis; minor, 89: & ratio $\frac{9}{4}$ major commatis 65; minor, 66. Sed æquet hæc 66 commata. Igitur, ut 3 ad 4, ita 66 ad 88. Atqui ratio $\frac{12}{4}$ major oſtenſa eſt commatis 88. Rurſus, contineat ratio $\frac{3}{1}$ tantùm 88 commata. Ergo ratio $\frac{9}{4}$ exacte habebit 66. Atqui pauciora continere monſtrata eſt; cum etiam plura continere deberet, quod ratio $\frac{3}{1}$ commatis 88 ſit major. Quare ratio $\frac{12}{4}$ ad rationem $\frac{9}{4}$ majorem rationem habet quàm ſupertertiam. Eadem ratiocinatione quaſcunque alias diverſæ ſeriei rationes, quacunque alia communi menſura menſuratas, ineffabilem inter ſe rationem habere cognoſcemus. Porro ratio $\frac{4}{1}$, quæ dupla eſt rationis $\frac{2}{1}$, bis tot commata habet, quot ſimpla $\frac{2}{1}$; ferme 112. Et ratio $\frac{9}{4}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ dupla eſt, commata prope habet 66, quæ dupla ſunt commatum 33.

Ratio autem $\frac{27}{8}$, quæ rationis $\frac{3}{2}$ tripla eſt, plus 97 commata continet, quæ item pluſquam tripla ſunt commatum 32. Planum itaque eſt, omnes diverſæ ſeriei, ſeu, non ab eadem fundana ratione adſcendentes, rationes, inter ſe eſſe incommenſurabiles. Deinde, rationis alicujus duplam, triplam, ſeſquialteram rationem in eadem rationum ſerie & progreſsione eſſe, in qua eſt ſimpla: quæ bis compoſita duplam exhibet; ter, triplam; & ſic deinceps. Cæterum rationem $\frac{6}{2}$ non eſſe rationis $\frac{3}{2}$ duplam; nec rationem $\frac{9}{2}$ ejuſdem triplam: item rationem $\frac{8}{3}$ non eſſe duplam rationis $\frac{4}{3}$; nec rationem $\frac{12}{3}$ ejuſdem triplam; & ſic conſequenter; duplici inſuper demonſtratione oſtendemus. Primâ, hoc adſumto lemmate: Duplorum duplos eſſe exceſſus: adeoque triplorum, triplos; ſeſquialterorum, ſeſquialteros. Quippe uti 4 & 2, binario inter ſe differunt; at illorum dupli, 8 & 4, quaternario; tripli, 12 & 6, ſenario; ſeſquialteri, 6 & 3, ternario, qui ſeſquialter eſt differentiæ ſimplorum, nempe binarii: ſic rationes $\frac{9}{1}$ & $\frac{4}{1}$, inter ſe differunt ratione $\frac{9}{4}$; harum duplæ, $\frac{81}{1}$ & $\frac{16}{1}$, ratione bis dupliſuperquarta, $\frac{81}{16}$, inter ſe diſtant; triplæ $\frac{729}{1}$ & $\frac{64}{1}$, ratione $\frac{729}{64}$, quæ eſt rationis $\frac{9}{4}$ tripla; ſeſquialteræ, $\frac{27}{1}$ & $\frac{8}{1}$, ratione $\frac{27}{8}$, quæ rationis $\frac{9}{4}$ eſt ſeſquialtera. Cum itaque ſimplarum rationum, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, differentialis ratio ſit $\frac{9}{8}$; duplarum, $\frac{6}{2}$ & $\frac{8}{3}$, ſeu $\frac{18}{6}$ & $\frac{16}{6}$, differentialis ratio, erit ſimplæ differentialis rationis dupla, nempe $\frac{81}{64}$. Atqui eadem eſt, quæ ſimplarum, ſcilicet $\frac{18}{16}$, ſeu $\frac{9}{8}$. Quod eſt abſurdum. Ergo rationum $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, non ſunt duplæ rationes $\frac{6}{2}$ & $\frac{8}{3}$. Eodem modo monſtrabimus, rationes $\frac{9}{2}$ & $\frac{12}{3}$, ſeu $\frac{27}{6}$ & $\frac{24}{6}$, quæ eadem differentiali

ratione, qua ſimplæ, inter ſe diſtant, non eſſe ſimplarum, $\frac{3}{2}$ & $\frac{4}{3}$, triplas. & ſic de reliquis caſibus omnibus ratiocinando. Conſtat ergo propoſitum. Liquet autem, utrique eandem rationem eſſe additam; primùm duplam, in his terminis, 6.3.2. &, 8.4.3. deinde triplam, in terminis, 9.3.2. &, 12.4.3. qua de cauſa eadem differentialis ratio manet. Altera demonſtratione idem oſtendemus, hoc ſumto lemmate: Arithmeticæ progreſsionis numeros, quorum ſecundus primi duplus eſt, eodem exceſſu proximos binos ſe invicem ſuperare, quo primus ſuperat nihilum. Quippe eodem exceſſu, quo unitas ſuperat nihilum, binarius ſuperat unitatem, ternarius binarium, & ſic deinceps: aut, ſi binarium ponam unitatis loco in hac progreſsione; 0. 2. 4. 6. 8. binario proximi bini inter ſe diſtant. & ſic de cæteris progreſsionum exceſsibus argumentando. Cum itaque in hac rationum progreſsione, $\frac{32}{32}.\frac{48}{32}.\frac{96}{32}.\frac{144}{32}.\frac{192}{32}.\frac{240}{32}$. ſeu, quæ in minimis terminis eadem eſt; $\frac{2}{2}.\frac{3}{2}.\frac{6}{2}.\frac{9}{2}.\frac{12}{2}.\frac{15}{2}$. ratio $\frac{3}{2}$ ſimpla ſit, & unitatis loco ponatur, cujus dupla eſt $\frac{6}{2}$; tripla, $\frac{9}{2}$; quadrupla, $\frac{12}{2}$; quintupla $\frac{15}{2}$; continebit dupla $\frac{6}{2}$, ſeu $\frac{12}{4}$, bis ſimplam $\frac{3}{2}$, ſeu $\frac{9}{4}$. Atqui duæ ſimplæ $\frac{6}{4}$, additæ efficiunt rationem $\frac{9}{4}$, quæ minor eſt ratione $\frac{12}{4}$. Quare dupla ratio $\frac{12}{4}$ majore exceſſu ſuperat ſimplam $\frac{6}{4}$, quàm ſimpla ſuperat rationem nihili $\frac{4}{4}$. quod eſt contra adſumtum lemma. Non ergo ratio $\frac{12}{4}$ dupla eſt rationis $\frac{6}{4}$. Eodem modo monſtrabitur ratio $\frac{9}{2}$ major quàm tripla rationis $\frac{3}{2}$; & ratio $\frac{12}{2}$ major quàm quadrupla rationis $\frac{3}{2}$: at ratio $\frac{15}{2}$ minor quàm quintupla rationis $\frac{3}{2}$. Quod eſt abſurdum. Quare ratio $\frac{15}{2}$ non eſt quintupla rationis $\frac{3}{2}$. Cæterum in vera rationis ſeſqui-

alteræ progreſsione; $\frac{32}{32}$. $\frac{48}{32}$. $\frac{72}{32}$. $\frac{108}{32}$. $\frac{162}{32}$. $\frac{243}{32}$. ratio $\frac{243}{32}$, quinto loco poſita, eadem ratione ſuperat quarto loco poſitam rationem $\frac{162}{32}$, qua hæc ſuperat tertio loco poſitam rationem $\frac{108}{32}$; & qua ratio primo loco ſita, $\frac{48}{32}$ ſuperat rationem nihili $\frac{32}{32}$. Ergo quinto loco poſita ratio $\frac{243}{32}$, quintupla eſt rationis $\frac{48}{32}$, primo loco poſitæ. Quod monſtrare oportebat. Sed & idem ſic conficiemus. Quoniam ratio $\frac{9}{4}$, eadem ratione $\frac{9}{6}$, ſeu $\frac{6}{4}$, ſuperat rationem $\frac{6}{4}$, qua ratio $\frac{6}{4}$ ſuperat rationem nihili $\frac{4}{4}$; ratio autem $\frac{12}{4}$ ſuperat rationem $\frac{6}{4}$ ratione $\frac{12}{6}$, quæ major eſt ratione $\frac{9}{6}$; idcirco ratio $\frac{12}{4}$ major eſt quàm ut rationis $\frac{6}{4}$ tantùm ſit dupla. Sed & eadem ratio $\frac{12}{4}$ rationis $\frac{6}{4}$ ponebatur dupla. Eadem ergo ratio $\frac{12}{4}$, & dupla eſt rationis $\frac{6}{4}$, & major quàm dupla rationis $\frac{6}{4}$. Quod eſt abſurdum. Porro exceſſus, ſeu differentialis ratio, qua ratio ſecunda $\frac{6}{2}$, ſuperat primam $\frac{3}{2}$, eſt ratio $\frac{6}{3}$; major differentiali ratione $\frac{9}{6}$, ſeu $\frac{6}{4}$, quâ tertia ſuperat ſecundam; & hæc major differentiali ratione $\frac{12}{9}$, quâ quarta ratio ſuperat tertiam; & hæc denique major differentiali ratione $\frac{15}{12}$, quâ quinta ſuperat quartam: ita ut differentialis ratio inter proximas binas rationes; ſimiliter uti ratio inter naturalis progreſsionis proximos binos numeros; decreſcat. quod eſt contra ſumtum lemma, quo quinarius non majore numero quaternarium ſuperare dicitur quàm binarius unitatem. Unde ſequitur, ut in falſa rationis ſeſquialteræ progreſsione, dupla $\frac{12}{4}$ major ſit quàm vera dupla $\frac{9}{4}$; contrà autem in eadem falſa progreſsione, quintupla $\frac{15}{2}$, ſeu $\frac{240}{32}$, minor quàm vera quintupla $\frac{243}{32}$. Eandem hanc veritatem paucis ſic oſtendemus. Quoniam ratio $\frac{3}{2}$, ex

illorum ſententia, eſt ad rationem $\frac{4}{1}$, ut illius denominator 8, ad hujus denominatorem 4; ſeu, quod idem, ut 4 ad 2; habebit ratio $\frac{8}{1}$ hujuſmodi quatuor rationes, cujuſmodi duas habet ratio $\frac{4}{1}$. At ratio $\frac{4}{1}$ habet duas rationes duplas. Ergo ratio $\frac{8}{1}$ habebit duplas rationes quatuor. Quod eſt falſum. Habet enim duntaxat tres rationes duplas. Falſum ergo, rationem $\frac{8}{1}$ duplam eſſe rationis $\frac{4}{1}$. quippe ejuſdem tantùm monſtratur ſeſquialtera; quòd hujuſmodi tres rationes æquet, cujuſmodi duas ratio $\frac{4}{1}$. Similiter, ſi ratio $\frac{6}{1}$ ad rationem $\frac{4}{1}$ eſſet, ut illius denominator 6 ad hujus denominatorem 4; ſeu, ut 3 ad 2; haberet ratio $\frac{6}{1}$ hujuſmodi tres rationes, cujuſmodi duas habet ratio $\frac{4}{1}$. Sed ratio $\frac{4}{1}$ duas æquat rationes duplas. Ergo tres rationes duplas æquabit ratio $\frac{6}{1}$. Quod eſt abſurdum. Quippe ratio $\frac{6}{1}$ minor eſt ratione $\frac{8}{1}$, quam tres rationes duplas æquare monſtravimus. Eodem modo oſtendemus rationem $\frac{72}{16}$ ad rationem $\frac{54}{16}$ habere minorem rationem quàm antecedens 72 ad antecedentem 54, ſeu, 4 ad 3. Cum enim ratio $\frac{54}{16}$ æquêt tres rationes ſeſquialteras; ratio $\frac{81}{16}$ æquabit hujuſmodi quatuor. Major autem eſt ratio $\frac{81}{16}$ quam ratio $\frac{72}{16}$. Conſtat igitur propoſitum. Harum autem demonſtrationum, quibus veram rationum compoſitionem oſtendimus, evidentiſſima exempla ſuppeditat Harmonice. Quoniam enim chorda novem palmorum tanta ſui parte ſuperat 6 palmorum chordam, quanta ſui parte hæc ſuperat chordam palmorum quatuor; ratio chordarum 9 & 4 palmorum, compoſita ex rationibus duabus $\frac{9}{6}$ & $\frac{6}{4}$ inter ſe æqualibus, dupla eſt unius ſimplarum, ipſius $\frac{9}{6}$, aut $\frac{6}{4}$. Quod ex di-

viſo canone Harmonico omnes, qui incorruptum aurium judicium adhibent, addiſcere poſſunt. Intervallum enim dia pente; quod quintam vulgo vocant; in ratione ſeſquialtera ſpectatur, & quinque ſonis in quolibet genere includitur: hujus autem duplum intervallum, quod in ratione biſſeſquialtera $\frac{9}{4}$ ſpectatur, novem ſonis continetur. Poſtquam enim dia pente intervallum, quinque ſonis à gravi in acumen adſcendentes, cecinerimus, alterum dia pente intervallum inacumen enitendo adponimus, acutiſsimum prioris dia pente ſonum, ſequentis dia pente intervalli graviſsimum faciendo. Similiter chordarum in ratione $\frac{2}{1}$ diviſarum ſoni dia paſon, ſeu octavæ, intervallo inter ſe diſtant; at bis dia paſon intervallo inſerſe diſtant ſoni in ratione $\frac{4}{1}$; ter dia paſon, in ratione $\frac{8}{1}$. & ſic de quibuſcunque aliis rationum rationibus ex Harmonice definiendo. Eandem autem hanc veritatem in miſtis obtinere dicimus. Miſtum enim $\frac{9v}{4a}$ viribus duplum eſt miſti $\frac{9v}{6a}$; aut quod ipſi viribus æquale eſt, miſti $\frac{6v}{4a}$. Eſſe autem miſtum $\frac{9v}{6a}$ viribus æquale miſto $\frac{6v}{4a}$; aut miſto $\frac{12v}{8a}$; aut cuicunque alii miſto, cujus vinum aquæ ſeſquialterum eſt; facillime ita percipietur. Sint enim tres cyathi, quorum ſinguli tres contineant vini menſuras, & duas aquæ. Quare trium illorum cyathorum miſta viribus ſunt æqualia. Ergo & confuſa duorum ex iſtis cyathorum miſta, hoc eſt, $\frac{6v}{4a}$ quantitate quidem unius $\frac{3v}{2a}$ dupla erunt, at viribus ipſi æqualia. Rurſus trium cyathorum illorum miſta confuſa, hoc eſt, $\frac{9v}{6a}$, quantitate unius $\frac{3v}{2a}$ tripla erunt, ſed viribus ipſi æqualia. Æqualis ergo eſt ratio $\frac{3}{2}$ rationi $\frac{6}{4}$, &

rationi $\frac{2}{6}$. & ſic de pluribus cyathorum æqualibus miſtis confuſis ratiocinando. Cum ergo viribus duplum ſit miſtum $\frac{9v}{4a}$ miſti $\frac{9v}{6a}$, duplo majorum virium miſtum hauriet, ſi quis unam menſuram miſti $\frac{9v}{4a}$ biberit, quàm ſi biberet menſuram unam miſti $\frac{9v}{6a}$. hoc eſt, ſi miſtum $\frac{45v}{20a}$ biberit, duplo citius vini viribus juvabitur, quàm ſi biberet quantitate quidem æquale, ſed viribus ſubduplum miſtum $\frac{39v}{26a}$. Similiter triplo citius quis vini virtutem ſentiet hauriendo miſtum $\frac{40v}{5a}$, quàm ſi hauriat miſtum $\frac{30v}{15a}$; ſeſquialtero citius, quàm ſi hauriat miſtum $\frac{36v}{9a}$. Porro miſtum nihili nullam rationem ad quodcunque aliud miſtum habet. Neque enim miſtum $\frac{4v}{2a}$ duplum eſt miſti $\frac{3v}{3a}$, quamvis duplæ rationis viribus hoc ab illo ſuperetur. Aliud autem eſt rationem, aut miſtum alterius eſſe duplum; &, miſtum duplæ rationis viribus ſuperare aliud miſtum. Uti enim binarius, licet ſui magnitudine ſuperet ſiphram, non tamen dici poteſt, ſiphræ duplus; ſic ratio $\frac{4}{2}$, quamvis ſui magnitudine ſuperet rationem $\frac{3}{3}$, tamen dupla hujus dici nequit. Eodem modo miſtum $\frac{6v}{4a}$ ſeſquialtera ratione ſuperat miſtũ $\frac{5v}{5a}$; ſed illa hujus ſeſquialtera dici nequit. quod ex ſuperius demonſtratis eſt perſpicuum. Hinc autem illud planum eſt, rationem duplam dici, ob quantitatem; quod antecedens duplo major ſit conſequente: rationem autem rationis duplam in miſtis vocari, ob vires. Antiquorum autem nullus, quod Euthymius mirari ſolet, ad utiliſsimam hanc de miſtorum viribus in data ratione augendis, aut minuendis, contemplationem acceſsit, ut quouſque in his progredi poſsimus, determinaret. In magnitudine autem

& numero has loquendi formulas usurparunt, ut ex Euclide, Archimede, aliisque antiquis cognoscimus. In figura igitur pag. 112, quoniam quadratum *adγa* sesquialterum est octanguli *MΓuxtζso*; & hoc octangulum sesquialterum quadrati *Muts*; rursus hoc quadratum sesquialterum octanguli *HpLqmrno*; & hoc octangulum sesquialterum quadrati *HLmn*; adeoque quinque hîc sunt figuræ sesquialtera ratione crescentes, in his numeris, 81. 54. 36. 24. 16. ratio primæ ad quintam quadrupla est rationis primæ ad secundam; seu, quæ eadem est, tertiæ ad quartam, aut quartæ ad quintam: ratio autem primæ ad quintam supertertia est rationis secundæ ad quintam. Rursus ratio secundæ figuræ ad quintam sesquialtera est rationis tertiæ ad quintam. & sic de cæteris rationum rationibus definiendo. Atque hinc, quid rationum proportio sit, non difficulter elicimus. nempe *ἀναλογία λόγων ἐςὶ λόγων λόγȣ ἰσότης. Proportio rationum est rationis rationum æqualitas.* Ut $\frac{64}{1}$ ad $\frac{8}{1}$, ita $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, & $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$. Similiter, ut $\frac{729}{64}$ ad $\frac{81}{16}$, ita $\frac{27}{8}$ ad $\frac{9}{4}$. Æqualitatem rationum rationis dico, non similitudinem, quamvis hoc vocabuli in proportionis definitione usurparit Euclides. Male autem Theo Smyrnæus simplicem numerorum proportionem; quod ex subjuncto exemplo videre est; definiit his verbis: *Ἀναλογία δέ ἐςι λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλȣς ποιὰ σχέσις· οἷον, ὡς δύο πρὸς ἓν, ȣ̈τως ὀκτὼ πρὸς τέσσαρα. Proportio est rationum inter se certa relatio: nempe, ut duo ad unum, sic octo ad quatuor.* Proportio enim, seu analogia, est rationum æqualitas, non autem certa quædam inter ipsas relatio, quæ vel multipla esse posit, vel super-

particularis, vel ſuperpers. quam definitionem ex ipſo analogiæ vocabulo addiſcimus. Analogia enim, ſeu proportio, eſt, cum, ut prima ad ſecundam, *ἀνὰ λόγον τὸν αὐτὸν, ſecundum eandem rationem*, fuerit ſecunda ad tertiam, tertia ad quartam, quarta ad quintam; & ſic deinceps, quouſque proportio excreverit. Itaque omnium optime proportionem Ariſtoteles finivit rationum æqualitatem. Verba illius ex V^{to} Ethicorum Nicomachiorum adponam.

Proportio eſt rationum æqualitas, & in quatuor pauciſſimis. Et quidem proportio diſcreta quod in quatuor conſiſtat, manifeſtum; ſed & continua. uno enim termino, tanquam duobus, utitur, & bis eum nominat: nempe, ut I.^{mi} termini quantitas ad quantitatem II.^{di}; ita II.^{di} ad III.^{tii}: bis quippe II.^{di} termini quantitas eſt nominata. ideoque ſi II.^{di} termini quantitas bis ponatur, quatuor erunt proportionalia.

Ἡ *ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγου, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. ἡ μὲν οὖν διῃρημένη, ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον. ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής. τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρήσεται, (melius χρῆται) καὶ δὶς λέγει· οἷον, ὡς ἡ τοῦ α' πρὸς τὴν τοῦ β', ἡ τοῦ β' πρὸς τὴν τοῦ γ'. δὶς οὖν ἡ τοῦ β' εἴρηται. ὥστε ἂν ἡ τοῦ β' τεθῇ δὶς, τέτταρα ἔσται τὰ ἀνάλογα.*

Michaël Epheſius, commentario in hunc locum, putat Ariſtotelem *æqualitatem* dixiſſe pro *ſimilitudinem*: dubio procul Euclidis auctoritate motus, qui hoc vocabuli in proportionis definitione adhibuit. Contrà autem Euthymius vocabulum *ὁμοιότης, ſimilitudo*, inconcinnum in hac definitione arbitratur: quod ad ſimiles figuras reſpiciendo, in quibus proportio in Geometricis reperitur, Euclides uſurpavit. Uti enim binario bina-

ritis æqualis dicitur, non autem similis; sic, si proportio fuerit, ratio prima rationi secundæ, & tertiæ, & cæteris deinceps, æqualis, non autem similis dicetur. quod similitudo plerunque in inæqualibus consideretur. Nec movet Euthymium auctoritas Nicomachi Geraseni, Pythagorici celeberrimi, qui libro secundo Arithmeticæ Introductionis; in quam certatim Heronas, Jamblichus, Asclepius, commentarios ediderunt; rationem secundam primæ similem nominat, non autem æqualem. Verba ejus, quæ quid ratio sit, quid proportio, egregie aliàs docent, adscribam.

Ἀναλογία κυρίως ἐστὶ δυοῖν, ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις εἰς τὸ αὐτό. κοινότερον δὲ, δυοῖν, ἢ πλειόνων σχέσεων· κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσωνται, διαφορᾷ δὲ, ἤ τινι ἑτέρῳ· λόγος μὲν οὖν ἐστι δύο ὅρων ἡ πρὸς ἀλλήλους σχέσις. σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων, ἡ ἀναλογία. ὥς τε ἐν ἐλαχίστοις ὅροις τρισὶν αὕτη συμμέμικται. δύναταί γε μὴν καὶ ἐν πλείοσι κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον προχωρεῖν. οἷον, τοῦ ἑνὸς πρὸς τὸν δύο λόγος ἐστὶ, δύο ὅρων ὑπαρχόντων, εἷς, ὁ διπλάσιος· ἀλλὰ καὶ τοῦ β' πρὸς τὸν δ'; ἕτερος λόγος ὅμοιος· ἀναλογία ἄρα ἡ α'. β'. δ'. λόγων γὰρ σύλληψις, ἢ ὅρων τριῶν, κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θεωρουμένων πρὸς ἀλλήλους.

Proportio propriè est duarum, pluriumve rationum collectio ad unum. Communius autem, duarum, aut plurium relationum; quamvis non eidem rationi, sed aut differentiæ, aut alicui alii, subjiciantur. Ratio igitur est duorum terminorum inter se relatio; compositio autē hujusmodi rationum, proportio. Itaque in paucissimis tribus terminis hæc commista est. quippe & in pluribus secundum eandem rationem progredi potest. ut, I ad II ratio est, duobus terminis existentibus, una, nempe dupla; sed & II ad IV est alia ratio similis. Proportio igitur est, I. II. IV. quippe rationū comprehensio seu trium terminorum, in eadē ratione inter se spectatorum.

Voculas εἰς τὸ αὐτὸ, quæ Boëthius vertit, *ad unum*; quamvis nec deinde repetitas videam, nec ab Asclepio agnitas, ut infercta videri possint; ita additas puto, ut denotent, proportionem non esse quarumvis duarum rationum conjunctionem, sed illarum, quæ à numeris, in uno rationum genere, ordine progredientibus, comprehenduntur. Proportio igitur continua his voculis denotari videtur; ut quæ in numeris, 4. 2. 1. aut, 1. 2. 4. &, 27. 18. 12. 8. non autem quæ in numeris, 8. 4. 3. 2. 4. aut discreta, 27. 12. 18. 8. Hoc igitur vult, proportionem esse quotvis rationum conjunctionem, nempe æque magnarum, quarum simpla & fundana ratio minimis terminis includitur; sive illa dupla sit, sive sesquialtera, aut quævis alia. At si aliæ quævis rationes inæquales conjungantur, uti $\frac{6}{4}$ & $\frac{4}{3}$, in terminis 6. 4. 3, proportio in iis nulla invenietur. Porro verbum συμμέμικται, *commista est*, Asclepius explicat, συνημμένη γίνεται, *fit continua*. Quod si idem dici potest, quod ejusdem cum alio magnitudinis existit, Proclus in Politiam Platonis pag. 431 recte pronunciavit: λόγου ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, καὶ δεσμῶν ὁ κάλλιστος. *Proportio est rationis identitas, & vinculorum pulcherrimum.* Theo Smyrnæus pag. 128, Euclidis & Procli vocabula conjunxit. Ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης, ἢ ταυτότης, τουτέστιν, ἐν πλείοσιν ὅροις λόγων ὁμοιότης. *Proportio est plurium rationum similitudo, seu identitas; hoc est, in pluribus terminis rationum similitudo.* Pappi, aliorumque veterum proportionis definitiones, ne longior sim, prætereo. Novam dedisse videtur Aristides Quintilianus, Musicæ libro III. pag. 120. Ἡ γεωμετρικὴ τὰς ἴσας

ὑπεροχὰς καὶ τοῖς λόγοις πρὸς ἀλλήλυς, ἅσπερ καὶ τῶν ὅρων συνίσησι. Geometrica proportio æquales excessus & in rationibus inter se comparatis servat, quos & in terminis constituit. Quod quidem in proportione continua veritati est consonum. quippe rationis $\frac{9}{6}$ terminorum quantitas, 15, eodem excessu superat rationis $\frac{6}{4}$ terminorum quantitatem, 10, quo terminus 9 superat terminum 4. utrobique enim excessus est 5. Neque verò; quæ est Nicomachi, ut & Pappi, altera definitio; hoc iis verbis innuere potuit, primæ rationis excessum esse ad excessum rationis secundæ, ut primus terminus ad secundum. Cæterum rectè Euclides proportionem in tribus terminis paucissimis consistere dixit, qui potentiâ quatuor existunt, quod medius bis nominetur. Vocabulum autem ἐλαχίςοις, hîc, uti & in Aristotele, Nicomacho, Theone Smyrnæo, aliis, vertendum, *paucissimis.* quod interpretes non observarunt. Sed ut ad propositum narrando revertar, rationum proportio ea est quam dixi: nempe ejusdem progressionis rationum, rationis æqualitas. Diversarum tamen progressionum rationes inter se comparari possunt, sed absque ullo usu, & contemplationis concinnitate. Uti enim in duplæ rationis serie ratio $\frac{4}{1}$ dupla est rationis $\frac{2}{1}$, aut $\frac{16}{1}$ ipsius $\frac{4}{1}$; sic in triplæ rationis progressione ratio $\frac{81}{1}$ dupla est rationis $\frac{9}{1}$, & hæc dupla ipsius $\frac{3}{1}$: in sesquialteræ rationis serie, ratio $\frac{81}{16}$ dupla est rationis $\frac{9}{4}$, & hæc ipsius $\frac{3}{2}$. Grandi igitur paralogismo lapsus est Gregorius à S.to Vincentio, qui Clavii de denominatoribus doctrinam secutus, rationum proportionem in hujusmodi numeris constituit, ut $\frac{3}{2}$ ad $\frac{4}{3}$,

ita $\frac{6}{1}$ ad $\frac{3}{1}$: aut permutandò, ut $\frac{8}{1}$ ad $\frac{6}{1}$, ita $\frac{4}{1}$ ad $\frac{3}{1}$. Neque enim; quod superius demonstravi; quemadmodum rationis $\frac{4}{1}$ dupla est ratio $\frac{8}{1}$, sic rationis $\frac{3}{1}$ dupla existit ratio $\frac{6}{1}$; sed longè hæc major est quàm illius dupla. Rursus ratio $\frac{8}{1}$ plus quatuor continet hujusmodi rationes, cujusmodi tres continet ratio $\frac{6}{1}$: ut & ratio $\frac{4}{1}$ relata ad rationem $\frac{3}{1}$. quod etiam ex commatum tabula confirmavi. Superat autem ratio $\frac{8}{1}$ rationem $\frac{4}{1}$ eadem ratione, qua ratio $\frac{6}{1}$ rationem $\frac{3}{1}$; nempe ratione $\frac{2}{1}$. Similiter ratio $\frac{8}{1}$ superat rationem $\frac{6}{1}$, ratione $\frac{8}{6}$; quâ etiam ratio $\frac{4}{1}$ superat rationem $\frac{3}{1}$. Quare de differentiali ratione, qua altera superat alteram, illæ ratiocinationes veræ sunt. sed hoc est contra ipsius propositum, qui rationum proportionem demonstrare conatur. Dicit enim rationem $\frac{8}{1}$ ita se habere, seu eam habere rationem ad rationem $\frac{6}{1}$, quam rationem habet ratio $\frac{4}{1}$ ad rationem $\frac{3}{1}$: non autem ita loquitur; rationem $\frac{8}{1}$ eadem differentiali ratione superare rationem $\frac{6}{1}$, qua differentiali ratione ratio $\frac{4}{1}$ superat rationem $\frac{3}{1}$. hoc enim & verum est, & perceptu facile. Nec quidquam ad rem, quod in hac, ut ita loquar, differentiali Gregorii rationum proportione, duarum mediarum rationum termini inter se multiplicati; hoc est, antecedentes inter se, ut & consequentes; eosdem numeros producant, quos rationum extremarum termini inter se multiplicati; utrobique enim in proposito exemplo consurgit ratio $\frac{24}{4}$, nempe sextupla: quoniam, quod ex suprà demonstratis liquet, hac multiplicatione binæ ac binæ rationes æquales adduntur. Quippe uti ratio $\frac{8}{1}$ dupla ratione superat rationem $\frac{4}{1}$, sic vicissim ratio $\frac{6}{1}$ du-

pla ratione superat rationem ⁝. Attamen, inquiebat Euthymius, ut enormem hanc Gregorii hallucinationem illustriorem reddam, unum locum, quem in tota Mathematica antiquitate invenire potui, isti suffragaturum, hîc ex MS.to nostro codice sum producturus.

PTOLEMÆUS HARMONICORUM
LIB. I. CAP. VI. FINE.

ΤΟ δὲ δὶς διὰ πασῶν οὕτως ἔχει πρὸς τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τουτέστιν, ὁ τετραπλάσιος λόγος πρὸς τὸν τριπλάσιον· ὡς μόνον τὸ διὰ πασῶν πρὸς μόνον τὸ διὰ πέντε· τουτέστιν, ὁ διπλάσιος λόγος πρὸς τὸν ἡμιόλιον. ἐὰν γὰρ ἑνὸς ἀριθμοῦ ληφθῶσι τριπλάσιός τε καὶ τετραπλάσιος· καὶ πάλιν ἡμιόλιός τε καὶ διπλάσιος· ἐπίτριτον ποιοῦσι λόγον ὅ, τε τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον, καὶ ὁ διπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον· ὥς τε ὅσῳ συμφωνότερόν ἐστι τὸ διὰ πασῶν τοῦ διὰ πέντε, τοσούτῳ συμφωνότερον γίνεσθαι καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν τοῦ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε.

Bis dia pason consonantia ita se habet ad dia pente & dia pason; hoc est, quadrupla ratio ad triplam: ut sola dia pason ad solam dia pente; id est, dupla ratio ad sesquialteram. Si enim unius & ejusdem numeri sumantur triplus & quadruplus; & rursus sesquialter & duplus; supertertiam rationem faciunt & quadruplus ad triplum, & duplus ad sesquialterum. adeo ut, quanto consonantior est dia pason consonantia ipsâ dia pente, tanto sit consonantior bis dia pason, ipsâ dia pason & dia pente.

ΠΟΡΦΥΡΙΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑ.

ΠΡὸς δὲ τὴν τούτων σαφήνειαν λαμβάνεται θεώρημά τι τοιοῦτον. Ἐὰν ἑνὸς ἀριθμοῦ ὁ μέν τις ἀριθμὸς ᾖ τετραπλάσιος, ὁ δὲ τριπλάσιος· καὶ ἔτι τοῦ αὐτοῦ ὁ μὲν διπλάσιος, ὁ δὲ ἡμιόλιος·

PORPHYRII COMMENTARIUS.

UT hæc plana fiant, sumitur hujusmodi aliquod theorema. Si unius numeri, alius quis numerus sit quadruplus, alius triplus; denuo ejusdem alius duplus, alius sesquialter:

excessus quadrupli supra triplum, supertertiam faciens rationem, idem erit excessui dupli supra sesquialterum. est enim & ipsa in ratione supertertiâ. Ut, numeri II sit quadruplus VIII; triplus verò VI: & rursus, binarii duplus quidem ipse IV; sesquialter verò III. Si igitur à ratione, VIII ad II, quadruplà, auferamus rationum ipsius VI ad II, triplam, relinquitur ratio ipsius VIII ad VI. Et rursus, si à ratione ipsius IV ad II, quæ dupla est, auferamus rationem ipsius III ad II, sesquialteram, relinquitur ratio quaternarii ad ternarium, eadem quæ ante. Sunt enim ambæ supertertiæ. Quare, quam rationem habet duplus ad sesquialterum, id est, quaternarius ad ternarium; eandem habet rationem quadruplus ad triplum. quo enim superat quadruplus triplum, hoc duplus superat sesquialterum. Etenim duplicatus sesquialter facit triplum; & duplus, quadruplum. ideoque eandem rationem habet quadruplus ad duplum, quam triplus ad sesquialterum.

ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραπλασίου πρὸς τὸν τριπλάσιον, ἐπίτριτον ποιοῦσα λόγον, ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ὑπεροχῇ τοῦ διπλασίου πρὸς τὸν ἡμιόλιον. ἔστι γὰρ αὕτη ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ. οἷον, τοῦ β´ ἀριθμοῦ ἔστω τετραπλάσιος μὲν ὁ η´, τριπλάσιος δὲ ὁ ς´· καὶ πάλιν τοῦ δύο διπλάσιος μὲν ὁ δ´, ἡμιόλιος δὲ ὁ γ´. ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ η´ πρὸς τὰ δύο, λόγου ὄντος τετραπλασίου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν ς´ πρὸς τὰ β´ λόγον, ὄντα τριπλάσιον, λείπεται λόγος τῶν η´ πρὸς τὰ ς´. καὶ πάλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δ´ πρὸς τὰ β´ λόγου, ὄντος διπλασίου, ἀφέλωμεν τὸν τῶν γ´ πρὸς τὰ β´ λόγον, ἡμιόλιον ὄντα, λείπεται λόγος ὁ τῶν τεσσάρων πρὸς τὰ τρία, ὁ αὐτός· εἰσὶ γὰρ ἄμφω ἐπίτριτοι. ὥς τε ὃν ἔχει ὁ διπλάσιος λόγον πρὸς τὸν ἡμιόλιον, τουτέστι, τὰ δ´ πρὸς τὰ τρία, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν τριπλάσιον. ᾧ γὰρ ὑπερέχει ὁ τετραπλάσιος τοῦ τριπλασίου, τούτῳ ὑπερέχει ὁ διπλάσιος τοῦ ἡμιολίου. καὶ γὰρ διπλασιασθεὶς ὁ μὲν ἡμιόλιος, τὸν τριπλάσιον ποιεῖ· ὁ δὲ διπλάσιος, τὸν τετραπλάσιον. καὶ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει ὁ τετραπλάσιος πρὸς τὸν διπλάσιον, καὶ ὁ τριπλάσιος πρὸς τὸν ἡμιόλιον.

Prima verba Ptolemæi falsa sunt, si vocabula, *ὅτως ἔχει, ita se habet*, vulgari modo accipiantur, nempe pro, *τὸν ἀυτὸν ἔχει λόγον, eandem habet rationem*: de differentiali autem ratione, quemadmodum Gregorius illam locutionem male usurpavit, sunt accipienda. Verum enim est, quod hac ratiocinatione colligit Ptolemæus, consonantiam ipsius bis dia pason eo concentus gratioris excessu superare, seu, tanto esse gratiorem consonantiâ ipsius dia pason & dia pente, quanto gratior est consonantia dia pason, consonantiâ ipsius dia pente: quia eadem ratione, qua ratio $\frac{4}{1}$ superat rationem $\frac{3}{1}$, ratio $\frac{8}{4}$ superat rationem $\frac{6}{4}$. Sed ipsum nunc catalogum falsarum Gregorii propositionum; quas ob majorem evidentiam numeris exposuit Euthymius; vobis examinandum, cum lubuerit, exhibebo.

Libro VIII.^vo^ paginâ 868. hæc est definitio II. *Rationum denominatores voco quantitates, quæ mutua habitudine sua exponunt qualis ipsas inter rationes proportio intercedat.* cui hanc explicationem subjungit. *Datæ sint rationes A ad B, C ad D, & sint totidem lineæ, E & F, quarum ratio exprimat proportionem rationis A B ad rationem C D; hoc est, sit quemadmodum linea E ad lineam F, ita ratio A B ad rationem C D: has lineas, E nimirum & F, datarum rationum denominatores appellabimus.* Hæc ita censuit Euthymius. Demonstratum est superiùs, ejusdem duntaxat progressionis rationes inter se esse ut lineam ad lineam. Cum enim, in duplæ rationis progressione, ratio $\frac{4}{1}$ dupla sit rationis $\frac{2}{1}$, erit ; ut $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$, ita 2 ad 1: item, ut $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, ita 2 ad 1, seu 4 ad 2. Ideoque, ut $\frac{16}{1}$ ad $\frac{4}{1}$, ita $\frac{4}{1}$ ad $\frac{2}{1}$;

ſeu, ut 4 ad 2, ita 2 ad 1. Quod ſi binarum extremarum, ut & binarum mediarum, rationum terminos inter ſe multiplicemus, binas extremas rationes addemus, & binas medias. Binæ autem extremæ rationes compoſitæ, majores ſunt quàm conjunctæ binæ mediæ: ſicut numeri 4 & 1 additi, majores ſunt quàm additi 2 & 2: hoc eſt, 5 major quàm 4. Similiter, cum in ſeſquialteræ rationis ſerie, ratio $\frac{9}{4}$ dupla ſit rationis $\frac{6}{4}$, erit; ut $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$, ita 2 ad 1: item, ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{9}{4}$, ita 2 ad 1, ſeu 4 ad 2. Ergo ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{9}{4}$, ita $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$; ſeu, ut $\frac{81}{16}$ ad $\frac{36}{16}$, ita $\frac{36}{16}$ ad $\frac{24}{16}$; hoc eſt, ut 4 ad 2, ita 2 ad 1. Quarum rationum binæ extremæ conjunctæ, ſimpla ratione ſuperant conjunctas duas medias. Et cum innumeræ ſint ſimplarum rationum progreſsiones; innumeræ quoque erunt rationes, quæ inter ſe ſint in ratione dupla, tripla, quadrupla, ſeſquialtera, ſupertertia, & in cæteris rationum ſpeciebus: ita tamen, ut binæ ejuſdem progreſsionis rationes inter ſe comparentur; & ex quatuor, ſaltem potentiâ, ejuſdem ſeriei rationibus proportio conſiſtat. Gregorius itaque & in eo peccat, quod quaſcunque duas rationes effabilem inter ſe rationem habere ſtatuit; nempe, rationem $\frac{8}{3}$ eſſe ad rationem $\frac{8}{6}$, ut hujus conſequens 6 ad illius conſequentem 3. Deinde, quod rationem $\frac{9}{4}$ ad rationem $\frac{6}{4}$ eam habere rationem putat, quam antecedens 9 ad antecedentem 6, hoc eſt, ſeſquialteram; cum, ex omnium quoque veterum vera ſententia, illa ſit hujus dupla. quemadmodum duo dia pente intervalla unius dia pente intervalli dupla exiſtunt. De exceſſu autem, ſeu differentiali ratione, utrumque illud verum. Nam &

ratio $\frac{8}{3}$ superat rationem $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{6}{3}$; & ratio $\frac{9}{4}$ superat rationem $\frac{6}{4}$, ratione $\frac{9}{6}$. Hæc Euthymii doctrina, & demonstrationibus, & exemplis, suprà est confirmata. Falsa igitur est hæc Gregorii definitio secunda; quod aut nullæ quantitates, hoc est, denominatores, in rerum natura reperiantur, quæ rationem inter datas rationes exprimant; aut non hujusmodi, cujusmodi censet Gregorius. Paginâ 872. falsa sunt sequentia. *Cæterùm duplex modus assignari potest componendi rationes, qui uterque usitatus est in Geometricis. Primus, quo linea trium, exempli gratiâ, palmorum dicitur composita ex tribus palmis. Secundus, quo quadratum, quod aream novem palmorum complectitur, perhibetur compositum ex multiplicatione longitudinis trium palmorum in tres palmos latitudinis: atque hi duo modi ita inter se differunt, quemadmodum discrepant inter se additio & multiplicatio. Uterque horum modorum etiam rationibus convenit. Nam si quis tres rationes in medium adducat; duplam nimirum, triplam & quadruplam; & aliam requirat quæ his tribus æqualis existat, ortam ex sola additione inter se datarum rationum; illi satisfiet, si trium harum rationum denominatores in unam summam addantur: quo pacto ratio noncupla emerget. Quod si autem rationem requirat resultantem ex multiplicatione harum rationum, inveniet longe diversam ab ea quæ per additionem producitur. denominator enim primæ rationis harum trium qui est duo, ductus in denominatorem secundæ, scilicet tria, producet sextuplam rationem; cujus denuo denominator sex, ductus in denominatorem quatuor, tertiæ harum trium, exhibebit rationem vigesies quadruplam; quæ longe alia est ab ea quæ per solam additionem earundem trium*

rationum est producta. Verum definitio præsens (V^{ta} libri VI^{ti}) *quam ex elementis Euclidis attulimus, de additione intelligenda non est, sed de sola multiplicatione. quod manifestè patet ex ipsis verbis quibus auctor utitur, asserens quantitates rationum inter se debere multiplicari, & rationem ex hac multiplicatione resultantem appellat compositam ex rationibus iis, scilicet secundum quas multiplicatio facta est.* Pag. 873. *Significant autem hæ formulæ loquendi, ut ex ipsis nominibus manifestum est, rationes has, scilicet novem ad tria, duodecim ad quatuor, triginta ad decem, & trium ad unum, per se mutuo multiplicari; non autem ad se invicem addi, ut mera fiat aggregatio rationum; duplicata igitur ratio non est ratio simpliciter tripla, sed multiplicata per triplam, & ratio triplicata significat rationem quæ nascitur ex denominatorum multiplicatione bis* (lege, *ter*) *factâ, atque ita deinceps.* Hæc ita censuit Euthymius. Primum, dum dicit, duos rationes componendi modos adsignari posse: quorum alterum deinde additionem vocat; alterum, multiplicationem: quid vocabulum *compositio* significet, ignoravit. Antiquis autem omnibus compositio, *σύνθεσις*, id significat, quod junioribus Latinis *additio*. *συνθεῖναι*, *componere* illis idem, quod nunc vulgo *addere*. Nec hic disputabo, quanto illud mihi concinnius vocabulum videatur: id solùm dicam, antiquorum nullum dixisse, quadratum, aut rectangulum, compositum esse ex duobus lateribus. nam verbum *constituere*, *συνίστασθαι*, usurpassent; quemadmodum Euclides ex tribus rectis lineis triangulum constitui, non autem componi, dicit. Una igitur est rationis vera compositio, quam illa definitione Euclides tradidit.

Huic autem juniores, quod rerum naturam in Canonicis nunquam consideraſſent, adeoque, quid ratio eſſet, ignorarent, monſtroſam, & contra naturæ decreta natam, rationis compoſitionem adjunxerunt. Nullum enim in natura, aut Geometricis, fundamentum vel uſum illa rationis compoſitio habet, qua ratio noncupla ex dupla, tripla & quadrupla compoſita dicitur; quod non rationes illæ conjungantur, ſed illarum termini antecedentes. Cæterum quam ob cauſam in Euclideâ rationum compoſitione multiplicatio adhibeatur, ex iis, quæ ſuprà multis differui, liquere poteſt. Illud quoque ex iis planum eſt, ex quatuor Arithmeticis operationibus duas tantùm in rationum doctrina adhiberi poſſe; additionem nimirum & ſubtractionem. Multiplicatio enim & diviſio; quas ferme ut compendiariam additionem & ſubtractionem abſolutorum numerorum ſcientia contemplatur; naturæ invidiâ, non parvo noſtro incommodo, in rationum doctrina ignorantur. Itaque ratio per rationem multiplicari nequit; multo minus per numerum, aut magnitudinem multiplicabitur. Neque enim, ſi ratio $\frac{2}{1}$, quæ dia paſon intervallum in Canonicis efficit, per numerum 3 multiplicetur, inde prodit ter dia paſon intervallum, $\frac{8}{1}$; ſed intervallum bis dia paſon & dia pente, in ratione $\frac{6}{1}$ ſpectatum. Denique & hoc de rationum compoſitione adnotabimus, ex doctrina noſtra deductum; poſitis quotcunque magnitudinibus, aut numeris, ut 8. 4. 2. 6. rationem primi ad ultimum, 8 ad 6, compoſitam eſſe ex rationibus mediorum, 8 ad 4, & 4 ad 2, & 2 ad 6: quemadmodum

numerus 3 componitur ex numeris $+5+4-6$. Sed eadem quoque ratio 8 ad 6 ex innumeris aliis intermediis rationibus composita esse potest: sicut ex innumeris aliis numeris, excessivis & defectivis conjunctim sumtis, numerus 3 constituetur. Unde Clavii argumentis quæ IX.ni libri adpendice exposuit, facile respondetur. His autem breviter ita repetitis falsa est Gregorii

Propositio I.ma *Quarumvis rationum possibile est denominatores exhibere.* Æque enim possibile censet Euthymius, & suprà demonstravit, quarumvis, adeoque diversæ progressionis, rationum denominatores exhibere, quæ secundum Gregorii definitionem secundam ostendant, quam rationem habeat ratio ad rationem; atque facile est numeris explicare, quam rationem habeat quadrati diameter ad suum latus. In hujus autem propositionis demonstratione inconsiderate posuit hæc verba: *ita etiam rectæ lineæ exhiberi possunt, quæ ostendant quanto una proportio major sit vel minor quàm altera.* quæ, contra ipsius mentem, quam ad definitionem secundam, pag. 868. v. 17. & in omnium propositionum verbis expressit, de differentiali ratione loquuntur, quam nulla hæsitatione ubique exhibemus. Cum enim dicit, rationem $\frac{A}{B}$ esse ad rationem $\frac{C}{D}$, ut est linea E ad lineam F; seu, rationem $\frac{8}{3}$ esse ad rationem $\frac{8}{6}$, ut 6 ad 3; hoc significat, rationem $\frac{8}{3}$ hujusmodi duas rationes continere, cujusmodi unam ratio $\frac{8}{6}$: non autem vult, rationem $\frac{8}{3}$ superare rationem $\frac{8}{6}$, ratione numeri 6 ad 3, hoc est, duplâ. Similiter, cum rationem $\frac{9}{4}$ ad rationem $\frac{6}{4}$ esse dicit ut 9 ad 6; illam nempe hujus sesquialteram; illud innuere debet,

rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{4}$ hujusmodi tres æquare rationes, cujusmodi duas æquat ratio $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$: non autem intelliget, rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{4}$ superare rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$, ratione $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{6}$. de quo nullus unquam dubitavit. Veræ igitur sunt omnes illius propositiones, quibus rationum proportionem demonstrare conatur, de differentiali ratione, qua una superat alteram. quod proposito ipsius adversatur.

Propositio II.[da] *Duæ rationes habentes commune consequens, eam sortiuntur rationem quæ inter antecedentes terminos reperitur.* Ut ratio $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,9}{B\,4}$, ad rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{B\,4}$; ita prioris rationis antecedens $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{9}$, ad posterioris rationis antecedentem $\genfrac{}{}{0pt}{}{C}{6}$. falsa est: sed de differentiali ratione, vera. Ex hac autem propositione; quod admodum absurdum est; etiam quævis ratio ad rationem nihili, habebit rationem, quam antecedens ad antecedentem: $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,4}{B\,4}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{B\,4} : \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{4}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{C}{6}.$ Quod idem est ac si numerum rationem habere dicerem ad nihilum, seu siphram, o. Superat autem ratio $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$ rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{4}$, ratione $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$; quemadmodum numerus 3 superat nullum o, ipso 3.

Propositio III. falsa. Ut $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,9}{D\,2}$ ad $\genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{D\,2}$; ita $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,9}{B\,4}$ ad $\genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{B\,4}$. vera autem de differentiali ratione $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{6}$, quâ ratio $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{2}$ superat rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{2}$; & ratio $\genfrac{}{}{0pt}{}{9}{4}$, rationem $\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{4}$.

Propositio IV falsa est, quod hujusmodi rationum proportio in rerum natura nobis ignoretur. $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,9}{B\,4}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{B\,4} : \genfrac{}{}{0pt}{}{D\,3}{B\,4}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{E\,2}{B\,4}.$

Propositio V, falsa. Ut $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,9}{B\,4}$ ad $\genfrac{}{}{0pt}{}{C\,6}{B\,4}$; ita $\genfrac{}{}{0pt}{}{D\,3}{F\,3}$ ad $\genfrac{}{}{0pt}{}{E\,2}{F\,3}$.

Propositio VI, falsa. $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,6}{B\,9}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{C\,2}{D\,3}. \mid \genfrac{}{}{0pt}{}{E\,4}{B\,9}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{C\,2}{D\,3} : \genfrac{}{}{0pt}{}{E}{4}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A}{6}.$

Propositio VII, falsa. $\genfrac{}{}{0pt}{}{A\,8}{B\,3}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{A\,8}{C\,6} : \genfrac{}{}{0pt}{}{C}{6}.\ \genfrac{}{}{0pt}{}{B}{3}.$

Propositio VIII; quæ cum IX.[na] propositione libri

V.ti Elementorum convenientiam habet; vera esset, si rationum illa proportio in natura fundamentum haberet.

Propositio IX, falsa. Ut $\frac{A\,9}{B\,4}$ ad $\frac{C\,9}{D\,6}$; ita $\frac{D}{6}$ ad $\frac{B}{4}$.

Propositio X, falsa. $\frac{A\,9}{B\,4}.\frac{A\,9}{C\,6} : \frac{A\,9}{D\,2}.\frac{A\,9}{E\,3}$.

Propositio XI, falsa. $\frac{A\,9}{C\,6}.\frac{A\,9}{D\,4} : \frac{B\,8}{C\,6}.\frac{B\,8}{D\,4}$. de differentiali autem ratione, vera: quippe rationem $\frac{9}{6}$ superat ratio $\frac{9}{4}$ ratione $\frac{9}{6}$; quâ etiam rationem $\frac{8}{6}$ superat ratio $\frac{8}{4}$.

Propositio XII, falsa. $\frac{A\,9}{B\,8}.\frac{A\,9}{C\,6} : \frac{C\,6}{A\,9}.\frac{B\,8}{A\,9}$.

Propositio XIII, falsa. $\frac{A\,10}{B\,9}.\frac{C\,8}{D\,6} \mid \frac{D}{6}.\frac{C}{8} : \frac{B}{9}.\frac{E}{12} \mid \frac{A}{10}$ & $\frac{E}{12}$ sunt denominatores, seu quantitates, rationum $\frac{10}{9}.\frac{8}{6}$. Superat autem rationem $\frac{10}{9}$ ratio $\frac{8}{6}$, ratione $\frac{12}{10}$.

Propositio XIV, falsa. $\frac{A\,3}{B\,1}.\frac{C\,9}{D\,6} \mid \frac{C}{9}.\frac{D}{6} : \frac{A}{3}.\frac{E}{2}$. Rationum $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$ denominatores sunt $\frac{E}{2}$ & $\frac{B}{1}$. Superat autem ratio $\frac{3}{1}$ rationem $\frac{9}{6}$, ratione $\frac{E\,2}{B\,1}$.

Propositio XV, falsa. $\frac{A\,9}{B\,6}.\frac{C\,4}{D\,4} : \frac{A}{9}.\frac{B}{6} \mid \frac{C\,4}{D\,4}.\frac{A\,9}{B\,6} : \frac{B}{6}.\frac{A}{9}$.

Propositio XVI, falsa. $\frac{A\,9}{B\,6}.\frac{C\,4}{C\,4} : \frac{A\,9}{C\,4}.\frac{B\,6}{C\,4} \mid \frac{C\,4}{C\,4}.\frac{A\,9}{B\,6} : \frac{C\,4}{A\,9}.\frac{C\,4}{B\,6}$.
Ex nova autem Euthymii doctrina, ratio defectiva $\frac{4}{9}$ major est ratione defectivâ $\frac{4}{6}$. Uti igitur ratio excessiva $\frac{9}{6}$ superat rationem nihili $\frac{4}{4}$ sui quantitate, nempe ratione $\frac{9}{6}$; ita ratio defectiva $\frac{4}{9}$, eadem ratione $\frac{6}{9}$ superat rationem $\frac{4}{6}$.

Propositio XVII, falsa. $\frac{C\,4}{A\,9}.\frac{C\,4}{B\,6} : \frac{B\,6}{C\,4}.\frac{A\,9}{C\,4}$.

Propositio XVIII, falsa. Neque enim ratio $\frac{A\,3}{B\,2}$ ad rationem $\frac{B\,2}{A\,3}$ est in dupla ratione ipsius $\frac{A}{3}$ ad $\frac{B}{2}$, id est, ut 9 ad 4: sed superat ratio $\frac{3}{2}$ rationem $\frac{2}{3}$, ratione $\frac{9}{4}$.

Propositio XIX, falsa. $\frac{A}{9}.\frac{B}{6}.\frac{C}{4} \mid \frac{D}{16}.\frac{E}{8}.\frac{C}{4} \mid \frac{A\,9}{D\,16}.\frac{B\,6}{E\,8} : \frac{B}{6}.\frac{E}{8}$.
Superat ratio $\frac{9}{16}$ rationem $\frac{6}{8}$, seu $\frac{12}{16}$, ratione $\frac{9}{12}$.

Propositio XX est vera: quod vero Euclidis elemento nitatur.

Propositio XXI est falsa. quod ratio $\begin{smallmatrix}A&9\\B&6\end{smallmatrix}$ non sit ad rationem $\begin{smallmatrix}C&4\\D&4\end{smallmatrix}$, ut $\begin{smallmatrix}A\\9\end{smallmatrix}$ ad $\begin{smallmatrix}B\\6\end{smallmatrix}$. aut $\begin{smallmatrix}C&4\\D&4\end{smallmatrix}$ ad $\begin{smallmatrix}A&9\\B&6\end{smallmatrix}$, ut $\begin{smallmatrix}B\\6\end{smallmatrix}$ ad $\begin{smallmatrix}A\\9\end{smallmatrix}$.

Propositio XXII falsa est, cum excessiva ratio comparatur cum defectiva. ut cum ratio excessiva $\begin{smallmatrix}A&6\\B&2\end{smallmatrix}$ major dicitur, ex Euclidis elementis, quàm ratio defectiva $\begin{smallmatrix}2\\6\end{smallmatrix}$; quamvis revera hæc in genere defectivo major sit quàm illa in excessivo.

Propositio XXIII, falsa. $\begin{smallmatrix}A&27\\B&18\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}D&8\\C&12\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\27\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}C\\12\end{smallmatrix}$. Differunt hæ duæ rationes ratione $\begin{smallmatrix}17\\12\end{smallmatrix}$.

Propositio XXIV, falsa. $\begin{smallmatrix}A&9\\B&6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}C&16\\D&12\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}D\\12\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}C\\16\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}B\\6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}E\\8\end{smallmatrix}\Big|$ Ergo ut $\begin{smallmatrix}A&9\\B&6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}C&16\\D&12\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\9\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}E\\8\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}F\\4\end{smallmatrix}\Big|$ Quæsitæ rationes sunt $\begin{smallmatrix}A&9\\F&4\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}E&8\\F&4\end{smallmatrix}$. quæ eadem ratione $\begin{smallmatrix}9\\8\end{smallmatrix}$ inter se differunt, quâ rationes $\begin{smallmatrix}9\\6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}16\\12\end{smallmatrix}$.

Propositio XXV, falsa. $\begin{smallmatrix}A&6\\C&3\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B&4\\C&3\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\4\end{smallmatrix}$. Ea ratione inter se distant. Belle autem II.^{da} & VII.^{ma} hîc conjunguntur. Similiter sequentes septem propositiones falsæ sunt; sed de differentiali ratione veræ. Exempla tamen adscribam.

Propositio XXVI, falsa. $\begin{smallmatrix}C&8\\D&9\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}E&2\\F&3\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\16\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\12\end{smallmatrix}$

Propositio XXVII, falsa. $\begin{smallmatrix}D&8\\E&6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}F&2\\G&4\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}D\\8\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}H\\3\end{smallmatrix}$

Propositio XXVIII, falsa. $\begin{smallmatrix}I&3\\K&6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}L&9\\M&8\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\4\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\9\end{smallmatrix}$

Propositio XXIX, falsa. $\begin{smallmatrix}C&16\\G&4\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}D&10\\E&5\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\12\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\6\end{smallmatrix}$

Propositio XXX, falsa. $\begin{smallmatrix}E&16\\C&12\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}G&8\\D&10\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\5\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\3\end{smallmatrix}$

Propositio XXXI, falsa. $\begin{smallmatrix}A&6\\B&3\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}E&2\\F&5\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}C\\5\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}D\\2\end{smallmatrix}$

Propositio XXXII, falsa. $\begin{smallmatrix}E&9\\G&6\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}G&6\\E&9\end{smallmatrix}:\begin{smallmatrix}A\\18\end{smallmatrix}\cdot\begin{smallmatrix}B\\8\end{smallmatrix}$

Propositio XXXIII, falsa est, quod ratio rationis $\begin{smallmatrix}A&1\\B&2\end{smallmatrix}$ ad rationem $\begin{smallmatrix}C&3\\D&1\end{smallmatrix}$ in natura ignoretur. Ita loqui debuisset: ratio differentialis $\begin{smallmatrix}6\\1\end{smallmatrix}$, qua ratio $\begin{smallmatrix}C&3\\D&1\end{smallmatrix}$ superat rationem $\begin{smallmatrix}A&1\\B&2\end{smallmatrix}$, composita est ex ratione $\begin{smallmatrix}A&1\\B&3\end{smallmatrix}$, & ratione $\begin{smallmatrix}D&1\\B&2\end{smallmatrix}$. Ratio autem composita esse potest ex aliis rationibus, in infinitum

variis, & innumeris ; quemadmodum quivis ſimplex numerus ex infinitis & diverſis partibus.

Propoſitio XXXIV eadẽ eſt, & falſa: non ob rationis compoſitionem, quę in hac, ut & præcedente, vera eſt; ſed ob rationũ rationẽ, quæ nulla eſt. ſeu, tantùm differentia.

Propoſitio XXXV falſa eſt, quia duarum rationum denominatores, quo ille putat modo, duabus lineis exhiberi nequeunt.

Propoſitio XXXVI, falſa. $\frac{A\,4}{B\,5}$. $\frac{C\,2}{D\,1}$: $\frac{E\,8}{F\,10}$. $\frac{G\,4}{H\,2}$. differunt autem binæ ac binæ ratione $\frac{5}{2}$. Similiter falſæ ſunt ſequentes: XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XL. XLI. XLII. XLIII. XLIV. XLV. XLVI. VLVII. XLVIII. XLIX. L. LI. LII. LIII. LIV. LV. LVI. LVII. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. LXIII. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. LXVIII. LXIX. LXX LXXI. LXXII. quarum exempla non difficulter quivis adponet.

Propoſitio LXXIII, falſa. $\frac{A\,9}{B\,6}$ major eſt quàm $\frac{C\,4}{D\,3}$. quævis $\frac{E\,2}{F\,1}$. Si vel rationum illa ratio in natura fundamentum haberet, falſum eſſet ex Euthymii doctrina, quod ratio $\frac{A\,9}{B\,6}$ ad rationem $\frac{E\,2}{F\,1}$, majorem habeat rationem quàm ratio $\frac{C\,4}{D\,3}$ ad rationem $\frac{E\,2}{F\,1}$. majore enim ratione inter ſe diſtant rationes $\frac{C\,4}{D\,3}$ & $\frac{E\,2}{F\,1}$, quàm rationes $\frac{A\,9}{B\,6}$ & $\frac{E\,2}{F\,1}$. Falſa quoque eſt propoſitio LXXIV.

Rationum multiplicationem, & diviſionem, in rerum natura â nobis ignorari, ſuprà eſt oſtenſum. Sequentes autem propoſitiones, de rationum compoſitione, ſeu additione; quæ fit terminis inter ſe multiplicatis, ſunt intelligendæ. Quare propoſitio LXXV his verbis enuncianda eſſet: *Datæ ſint rationes* $\frac{A}{B}$ *&* $\frac{C}{D}$. *Fiat, ut C ad D, ita B ad E. Dico rationes* $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ *compoſitas* (ſeu, *additas*) *efficere rationem* $\frac{A}{E}$. Similiter ſequentes ſunt reformandæ.

Propoſitio LXXXI eſt falſa. Ratio $\frac{A}{B}\frac{8}{3}$ ſuperat rationem $\frac{C}{D}\frac{2}{3}$, ratione $\frac{8}{2}$; quæ etiam ex additis rationibus $\frac{A}{B}\frac{8}{3}$, $\frac{D}{C}\frac{3}{2}$ conficitur. Similiter falſæ ſunt, LXXXIV. LXXXVI. LXXXVII.

Propoſitio XCIV falſa eſt, ſed intér novæ ipſius de proportionibus doctrinæ elementares numeranda: ideoque adponenda: *Datæ ſint IV rationes,* $\frac{A}{B}\frac{24}{8}$, $\frac{C}{D}\frac{6}{2}$, $\frac{E}{F}\frac{4}{12}$, $\frac{G}{H}\frac{1}{3}$. *ſi rationes* $\frac{A}{B}\frac{24}{8}$, *&* $\frac{G}{H}\frac{1}{3}$, *inter ſe multiplicatæ idem producant, quod rationes* $\frac{C}{D}\frac{6}{2}$, $\frac{E}{F}\frac{4}{12}$, *multiplicatæ inter ſe: Dico rationem* $\frac{A}{B}\frac{24}{8}$, *eſſe ad rationem* $\frac{C}{D}\frac{6}{2}$, *ut ratio* $\frac{E}{F}\frac{4}{12}$ *eſt ad rationem* $\frac{G}{H}\frac{1}{3}$. Utrobique autem ex illa multiplicatione prodit ratio $\frac{24}{24}$. Idem hoc in quintæ propoſitionis exemplo, & multis aliis perſpicitur: $\frac{9}{4}.\frac{6}{4}:\frac{3}{3}.\frac{2}{3}$. De differentiali autem ratione, qua una ratio ſuperat alteram hæc, ut pleræque omnes, vera exiſtit.

Propoſitiones XCV. XCVI. XCVII ſunt falſæ.

Propoſitio XCIX, falſa. Uti rectangulum $\frac{A}{D}$8, ad rectangulum $\frac{B}{C}$3, ita ratio $\frac{A}{B}\frac{2}{1}$, ad rationem $\frac{C}{D}\frac{3}{4}$. Nec dici poteſt: ut 8 ſuperat 3, quinario; ſic ratio $\frac{2}{1}$ ſuperat rationem $\frac{3}{4}$ ratione aliqua quinquies ſumta. Superat autem ratio $\frac{2}{1}$ rationem $\frac{3}{4}$, ratione inter rectangulorum illorum quantitates ſpectatâ.

Propoſitio CI, falſa. ut & CII. CIII. CXIII.

Propoſitio CXIV, Arithmeticam rationum additionem tradens, falſa eſt, & multarũ parens. $\frac{AC}{7}$, $\frac{D}{2}$. $\frac{AB}{4}$. $\frac{BC}{3}$. | ratio $\frac{AB}{4}$ ad $\frac{D}{2}$, unà cum ratione $\frac{BC}{3}$ ad $\frac{D}{2}$, æqualis eſt rationi $\frac{AC}{7}$ ad $\frac{D}{2}$.

Propoſitio CXVII, falſa in primis. ut & CXVIII. CXIX. CXXI. CXXII. CXXIII. CXXV. CXXVI. CXXVII. CXXXI. CXXXII. CXXXIII. CXXXVIII. CXXXIX. CXL. CXLI. CXLII. CXLIII. CXLIV. CXLV. CXLVI. CXLVII. CXLVIII. CLI. CLIII. CLXI. CLXII. CLXIII. CLXIV. CLXV. CLXX.

Falsæ igitur sunt in octavo de Quadratura Circuli libro propositiones CXVII. quibus ex libro decimo XVII adjungemus; ut falsarum propositionum, & quidem elementarium, numerus excrescat ad CXXXIV.

Propositio I.ma pag. 1100, ex Euthymii doctrina, falsa est; recte tamen ex octava quinti Elementorum deducta. $\frac{A\ 2}{B\ 3}.\frac{C}{6}.$ ratio $\frac{A}{2}$ ad $\frac{B}{3}+\frac{C}{6}$, seu 9, major defectiva est, quàm ratio $\frac{A\ 2}{B\ 3}$.

Propositio II, falsa. ut & III. IV. V. VI. VII. VIII. XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII. XXXIX. XL. LIV. Cæteras, in quibus demonstrandis has falsas elementares usurpavit, operose recensere nolui, quod rerum Geometricarum gnarus sciat, cum fundamento male jacto ruere quidquid ipsi fuerit superstructum. Nec ita omnia ipsius nova inventa censui, ut adfirmare sustineam, nullum cuiquam spicilegium esse relictum. Suffecisset, duas tres falsas propositiones exposuisse, quibus deinde cæteræ nitantur. Hoc autem maxime animadversione dignum, non tantum falsa hæc Gregorii theoremata, sed & omnes veterum ac juniorum paralogismos, in quibus recensendis hactenus occupatus fui, ex eo fonte manasse, quod Geometricas rationes, & minutias Arithmeticas eandem contemplationem admittere putarent. Vera enim est in minutiis spectata Gregorii propositio II. minutiam $\frac{9}{4}$ imperialis, ad minutiam $\frac{6}{4}$ imperialis, seu 108 solidos Lubecenses ad solidos 72, esse ut 9 ad 6. Vera propositio III. ut $\frac{9}{2}$ imperialis ad $\frac{6}{2}$, ita $\frac{9}{4}$ ad $\frac{6}{4}$; seu, ut solidi 216 ad 144, ita esse 108 ad 72. Vera propositio XCIV. nempe minutiam $\frac{6}{2}$ multiplicatam per minutiam $\frac{4}{12}$ eandem minutiam $\frac{24}{24}$ producere, quam minutia $\frac{24}{8}$ multiplicata per minutiam $\frac{1}{3}$. Atque hîc, cùm

in multam noctem dissertationem extraxisset, loquendo fessus substitit Euthymius. Ego autem, cum plura audîssem, quàm ab ullo Geometra expectari posse putarem, inventionum novitate ac magnitudine impulsus, omnes cogitationes meas in examinandis Euthymii elementis defixi: præclarum laboris præmium ratus, si ejus disciplinæ, quam sapiens ac veneranda antiquitas certissimam judicasset, veritatem vel ipse defendere, vel ab aliis adsertam possem percipere; inexpectatum verò, si veterum inventis majore veritatis luce obscuratis, animum, discendi studio incensum, veris sententiis collustrare possem. Cæterum humanæ in judicando imbecillitatis mihi conscius, cum diviniores quasque animas ad illa examinanda exorandas statuerem, vos, illustres Geometræ, novo more, consulere decrevi: quos etiam in suum præjudicium, si ita veritas & rei evidentia suaderent, pronunciaturos scirem. EUCL. Majora quàm ullus nostrûm expectasset, narrando evincens, immortalem inventionis gloriam Euthymio comparâsti. ARCHIM. Hoc tandem omnes vos judicaturos prævidebam. HERMOT. Felix faustumque veritati, & disciplinis Mathematicis, judiciũ vestrum voveo; quo, immensum quantum, Euthymius exhilarabitur, qui inventionis suæ ingens præmium se relaturum judicavit, si magnorum virorum judiciis animatus exclamare posset, εὕρηκα.

FINIS.